Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева
Дальневосточного отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Тыщенко Андрей Геннадьевич

Разработка и апробация комплекса прикладных программ на основе метода параболического уравнения для моделирования распространения звука в мелком море

Научно-квалификационная работа (диссертация)

Направление подготовки: 03.06.01 Физика и астрономия

Профиль: 01.04.02 «Теоретическая физика»

Научный руководитель

д.ф.-м.н.

Петров Павел Сергеевич

Владивосток – 2025

Оглавление

Введение

В настоящее время в акустике океана активно развиваются методы математического моделирования распространения звука в трёхмерных неоднородных волноводах и разрабатываются комплексы программ, основанные на данных методах.

Математическое описание таких эффектов как отражение, преломление, диффракция и рассеяние акустической энергии в трёхмерном пространстве, то есть одновременно в вертикальной и горизонтальной плоскостях, рассматриваются в литературе на протяжении нескольких десятилетий. Обзоры наиболее ранних работ представлены, например, в книге [1] и статье [2]. В дальнейшем были разработаны первые эффективные и достаточно точные методы численного моделирования распространения звука, например, основанные на трёхмерных параболических уравнениях [3, 4, 5]. Необходимость учитывать трёхмерные эффекты также была экспериментально подтверждена в ряде работ 1990-2005 гг. [2, 6, 7, 8].

Со временем также были разработаны идеализированные модельные задачи, отражающие характерные гидрологические, батиметрические и геологические (связанные со структурой слоёв дна) особенности, создающие различные трёхмерные эффекты [9, 10, 11]. Наиболее часто используемой является задача распространения звука в клиновидном прибрежном волноводе мелкого моря, которая на данный момент лежит в основе процесса валидации разрабатываемых методов и моделей [12, 13, 14, 15, 16]. Однако существуют и другие модельные задачи, фокусирующиеся на исследовании влияния формы и параметров волновода на распространение звука, например, волноводы, сформированные подводными каньонами, поперечные сечения которых имеют форму функции Гаусса [17, 13], а также искривлёнными фронтами внутренних волн [18]; волноводы, содержащие одиночные и двойные подводные возвышенности [15], шепчущие галереи, формируемые за счёт рефракции над чашеобразным дном [19]; волноводы с переменной скоростью звука [20].

Немаловажно также отметить работы, в которых исследование посвящёно трёхменым эффектам, возникающим в реальных волноводах, таких как различного рода явления, возникающие из-за соляных клинов в устьях рек и нелинейных внутренних волн в областях континентального шельфа, и влиянию батиметрии на трёхмерную фокусировку, расфокусировку и дифракцию акустических волн. Подобные эффекты были рассмотрены в речных устьях [21], озёрах [22], в каньоне Хадсона [23, 17], в Восточно-Китайском море [15], в областях с выраженными нелинейными внутренними волнами [24, 25], на материковых склонах [26], а также при рассеивании звука над Срединно-Атлантическим хребтом [27] и абиссальной равниной [28], и при распространении через скопления пузырьков, производимых горбатыми китами во время питания [29].

Большое внимание в литературе уделяется исследованию точности и применимости различных современных методов моделирования распространения и рассеяния звука в трёхмерных океанических волноводах. Например, методы конечных элементов были рассмотрены в работе [29], где они были применены для моделирования акустического давления в пузырьковых сетях, создаваемого вокализациями горбатых китов. Также, их точность была оценена при моделировании распространения в воде и дне сейсмоакустических волн, создаваемых землетрясениями [30].ругая группа численных методов, основанных на методе параболического уравнения и впервые представленных в подводной акустике работами [31, 32], в дальнейшем была развита в таких работах как [33, 12, 13, 34], в которых особое внимание уделено перекрёстным членам, содержащим производные по глубине и угловой координате и возникающим из квадратного корня при формальной факторизации уравнения Гельмгольца. Также, в работе [34], описано использование вычислительной сетки, предназначенной для лучшей обработки граничных условий. Лучевая теория распространения звука была также применена для расчёта трёхмерных звуковых полей и была протестирована в ходе моделирования натурных экспериментов в Восточно-Китайском море в работе [15]. Улучшению качества моделирования распространения звука в задачах с реальными внутренними волнами посвящена работа [25], в рамках которой был разработан комбинированный метод моделирования, включающий нелинейную модель внутренних волн в региональную модель, основанную на реальных данных и учитывающую приливы и отливы. Также, в недавних работах внимание уделяется моделированию рассеяния, например, с использованием методов, основанных на явной численной схеме для решения интегрального уравнения Кирхгофа во временной области [35], методе кратковременных эквивалентных источников для задач широкополосного рассеяния [36], численном методе расчёта функции Грина для моделирования рассеяния на больших расстояниях, возникающего из-за объектов, расположенных на морском дне или погружённых в нём.

Некоторые методы, описанные в литературе, также имеют открытую программную реализацию. Так, например, программы BELLHOP3D [15] и TRACEO3D [37] реализуют метод моделирования распространения звука, основанный на трассировке лучей и гауссовых пучков. В KRAKEN3D [38] реализовано вычисление акустических полей в рамках модового разложения. Также, моделирование путём решения трёхмерных параболических уравнений реализовано в CAPRE3D [39].

Настоящая выпускная квалификационная работа посвящена широкоугольным модовым параболическим уравнениям, которые известны уже достаточно давно, однако до сих пор не получили широкого распространения. Несмотря на это, использование таких уравнений представляется перспективным, так как в сравнении с узкоугольными параболическими уравнениями они позволяют получать более точные решения, при этом требуя лишь незначительного увеличения объёма вычислений. Так, самым трудоёмким этапом является решение акустической спектральной задачи, которое может быть выполнено заранее для изучаемой области, что значительно ускоряет процесс моделирования, так как само решение уравнения занимает существенно меньшее количество времени. В настоящей работе также предложено применение лучевых стартеров, которые являются более подходящими для решения широкоугольных параболически уравнений в сравнении с традиционно используемыми начальными условиями Гаусса и Грина.

Глава 1

Описание предметной области и обоснование постановки задачи

1.1 Оценка влияния антропогенных акустических сигналов

Моделирование трёхмерных звуковых полей применяется во многих областях исследования и освоения океана, требующих учёта множества параметров сложных неоднородных океанических волноводов.

С развитием промышленности все больше расширяется хозяйственная деятельность человека, связанная с добычей нефти, газа и разнообразных биоресурсов в акватории мирового океана, в результате которой создаётся огромное количество антропогенных шумов, которые негативно сказываются на морской фауне [40, 41]. Таким образом, возникает задача оценивания и минимизации шумового загрязнения и его воздействия на мировой океан. Существуют два подхода к решению этой задачи: проведение измерений и моделирование. В первом случае проводится некоторое количество замеров плотности звука в воде, по которым строится интерполяционная картина звукового поля. Недостатком такого метода является дороговизна и сложность проведения измерений, которые также фактически могут быть получены только в точках среды на сетке с очень большими шагами по координатам, поэтому такие данные чаще всего используются для корректировки и проверки точности модельных данных. В свою очередь моделирование требует данных о положении и характеристиках источника звука, а также данных о свойствах среды: батиметрии, гидрологии и структуре дна. Основным преимуществом моделирования является возможность вычисления звукового поля как и уже существующих источников, так и планируемых, что позволяет заранее минимизировать влияние человека на океан. Недостатком такого метода является необходимость сбора и обработки изменяющихся данных о состоянии среды, что само по себе является сложной задачей.

Мониторинг уровней акустической энергии, распределённой по большому морскому пространству, возникшей из антропогенных шумов, создаваемых в процессе различных индустриальных процессов на континентальном шельфе, является одной из областей, для которых применение трёхмерных моделей распространения звука является обязательным [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48]. Действительно, не представляется возможным полностью покрыть интересуемое морское пространство приёмниками, поэтому несколько точечных опорных измерений должны быть использованы для восстановления звукового ландшафта морской среды. Также, зачастую требуется провести тщательное исследование звукового загрязнения морского пространства в реальном времени, чтобы в кратчайшие строки предоставить оценку его влияния на морскую фауну и принять подходящие меры смягчения последствий [42]. Такие требования накладывают существенные ограничения на производительность вычислительных программ для моделирования распространения звука. Например, в случае акустического мониторинга сейсмической разведки возникает задача моделирования широкополосного (10–250 Гц.) импульсного распространения в трёхмерной вычислительной области, представляющей собой морское пространство протягающееся на десятки километров в обоих горизонтальных направлениях [44, 49]. Многие существующие методы моделирования распространения звука не могут удовлетворить требованию того, что вычисления в данной области исследований должно проводиться почти в реальном времени. Например, известно, что использование современного высокоточного подхода, основанного на трёхмерных параболических уравнениях, требует 20 часов для вычисления акустического поля на частоте 25 Гц в эталонной задаче с подводным акустическим волноводом [50]. Таким образом, оказывается затруднительным полагаться на трёхмерные параболические уравнения для проведения моделирования широкополосных источников в разумные сроки.

1.2 Акустическая навигация

С каждым годом хозяйственная деятельность человека всё больше осуществляется с использованием автономных подводных аппаратов, требующих наличия стабильных систем навигации и связи, основанных на распространении звука, при этом привычные системы, основанные на электромагнитном излучении, неприменимы в подобных условиях [51, 52]. При разработке систем подводной акустической навигации возникает задача определения зон уверенного приёма и поиска взаимного расположения источников звукового сигнала таким образом, чтобы минимизировать зоны акустической тени. Также существует задача расчёта траекторий распространения звука на несущих частотах сигналов, с целью определения искривления по сравнению с геодезической на поверхности Земли для вычисления задержки звукового сигнала при осуществлении подводной навигации.

1.3 Акустические сигналы, создаваемые транспортными судами

В настоящее время эффективное и подходящее измерение шумов транспортных судов и оценка их влияния на окружающую среду является одной из актуальных проблем подводной акустики [53, 54, 55, 56, 57, 58]. Широко известно, что судоходство является одним из основных антропогенных источников шума, влияющего на морские экосистемы, особенно в прибрежных районах близких к крупным морским портам. Систематическая подверженность высокому уровню звукового воздействия может негативно сказываться на популяции различных видов морских млекопитающих, рыб и даже безпозвоночных, поэтому существенные исследования фокусируются на определении приемлемого порога этого взаимодействия [59, 60, 61]. С другой стороны шум, создаваемый транспортным судном, может быть источником информации о среде. Так, в [62, 58] судоходный шум используется в качестве источника для возможности проведения геоакустического обращения параметров дна. В [63] как спектр функции источника сухогруза, так и параметры морского дна были оценены с использованием статистического вычислительного метода, предполагающего, что судно может быть представлено в виде точечного источника, в то время как авторы [64] одновременно оценивают спектр функции источника сухогруза и параметры модели морского дна, используя метод Байесовского обращения и представления торговых судов в виде нескольких точечных источников.

В дополнение к прямым замерам, оценка распределения уровня шума в больших морских пространствах требует подходящих инструментов моделирования распространения звука. В последнее время для данной задачи были разработаны несколько классов вычислительных методов, основанных на различных математических подходах, включающих лучевую теорию, метод параболических уравнений [50, 65], метод потока энергии [66, 67] и модовые параболические уравнения [68, 69] (то есть вертикальные моды, объединённые с двумерными параболическими уравнениями для вычисления амплитуд модового разложения поля). Большинство этих методов были подвергнуты тщательной верификации в различных эталонных задачах, включающих некоторые упрощённые модели среды (например, в [68]) и монопольный (всенаправленный) точечный источник (в большинстве случаев тональный). Несмотря на впечатляющие вышеупомянутые успехи в разработке численных методов моделирования звукового поля в подводной акустике, достигнутые за последние 20 лет, до сих пор существует множество вопросов, возникающих из требований индустрии и реальных приложений, и относящихся к балансу эффективности и точности, а также корректному представлению различных источников шума в вычислительных моделях.

1.4 Обзор существующих методов решения

На данный момент существует несколько программных продуктов позволяющих получать численное решение уравнения Гельмгольца (1). BELLHOP [70] и Traceo3D [71], основанные на методе суммирования Гауссовых пучков и лучевой теории распространения звука соответственно. Недостатком этих методов является использование геометроакустического приближения, которое является недостаточно точным при моделировании источников звука, имеющих частоту менее 1 кГц. Лин из океанографического института в Вудс-Хоуле и Стюрм из центральной школы Лиона в последнее десятилетие разработали закрытые комплексы программ, основанные на решении трёхмерного параболического уравнения [72, 73, 65], однако решение таких уравнений требует запредельных затрат памяти и времени, вычисление решения даже самых простых задач занимает не менее суток.

1.5 Требования к модели и её программной реализации

Существующие на данный момент программные комплексы в основном сфокусированы на решении какой-то одной мелкой задачи, зачастую являющейся частью чего-то большего, или же направлены на решение какой-то одной конкретной задачи. Также, многие из них не позволяют выполнять вычисления за разумное время. Поэтому возникает необходимость в разработке новой модели, позволяющей выполнять оценку поля акустического давления в некотором спектре задач, не имея привязанности к определённым параметрам. Основными требованиями к программной реализации модели являются:

1. Реализация численных схем решения модовых параболических уравнений.

2. Моделирование звукового поля на трёхмерной сетке.

3. Возможность использования как готовых коэффициентов уравнения, так и коэффициентов, вычисленных с помощью пакета Cambala [74], с указанием необходимых параметров: плотности среды, батиметрии, гидрологии и др.

4. Проведение трассировки горизонтальных лучей, соответствующих вертикальным модам.

5. Вычисление временного ряда импульса звукового сигнала в произвольных точках среды.

6. Оценка уровня шума с использованием интегральной характеристики звукового воздействия.

7. Высокая скорость работы по сравнению с альтернативными методами моделирования.

Глава 2

Математические методы

2.1 Модовое представление звукового поля точечного источника

Звуковое поле $p\,(x, y, z)$ (где z обозначает глубину, а x, y — координаты горизонтальной плоскости), создаваемое точечным источником в трёхмерном волноводе мелкого моря, расположенным по координатам $x = y = 0$, $z = z_s$ и имеющего частоту f, описывается трёхмерным уравнением Гельмгольца [75]

$$\left(\rho\,(x, y, z)\,\nabla\left(\frac{1}{\rho\,(x, y, z)}\nabla\right) + K^2\,(x, y, z)\right) p\,(x, y, z) = -\delta\,(x)\,\delta\,(y)\,\delta\,(z - z_s)\ , \tag{1}$$

а также граничными условиями и условиями на границах раздела сред вида

$$p\Big|_{z=0} = 0\,, \tag{2}$$

$$p\Big|_{z=h_i^-} = p\Big|_{z=h_i^+}\,, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\Bigg|_{z=h_i^-} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\Bigg|_{z=h_i^+}\,, \tag{4}$$

$$p\Big|_{z=H} = 0 \tag{5}$$

где $\rho\,(x, y, z)$ — плотность среды, H – нижняя граница расчётной области, $\mathbf{n}$ — нормаль к границам разделов слоёв среды, $h_i, i = \overline{1, N_h}$ — глубины этих разделов. Коэффициент $K\,(x, y, z)$ представляет собой (комплексное) волновое число среды и определяется как

$$K\,(x, y, z) = \frac{\omega}{c\,(x, y, z)}\,(1 + i\eta\beta\,(x, y, z))\ , \tag{6}$$

где $c\left(x,y,z\right)$ — скорость звука, $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота, $\beta\left(x,y,z\right)$ — коэффициент затухания звука, $\eta = 1/40\pi\log_{10} e$.

Используя технику разделения переменных звуковое поле может быть представлено в виде модового разложения

$$p\left(x,y,z\right) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j\left(x,y\right)\varphi_j\left(z,x,y\right)\,, \tag{7}$$

где функции $\varphi_j\left(z,x,y\right)$ являются модовыми функциями, а функции $A_j\left(x,y\right)$ – модовыми амплитудами. Функции $\varphi_j\left(z,x,y\right)$ и соответствующие им волновые числа $k_j\left(x,y\right)$ могут быть получены из решения задачи Штурма-Лиувилля при фиксированных координатах x,y

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi_j\left(z,x,y\right)}{\mathrm{d}z^2} + K^2\left(z,x,y\right)\varphi_j\left(z\right) = k^2\varphi_j\left(z,x,y\right)\,, \\ \varphi_j\big|_{z=0} = 0\,, \\ \varphi_j\big|_{z=h_i^-} = \varphi_j\big|_{z=h_i^+}\,, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial z}\big|_{z=h_i^-} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\big|_{z=h_i^+}\,, \\ \varphi\big|_{z=H} = 0\,. \end{cases} \tag{8}$$

Без учёта межмодового взаимодействия функции $A_j\left(x,y\right)$ являются решениями так называемого уравнения горизонтальной рефракции

$$\frac{\partial^2 A_j\left(x,y\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_j\left(x,y\right)}{\partial y^2} + k_j^2\left(x,y\right)A_j\left(x,y\right) = -\delta\left(x\right)\delta\left(y\right)\varphi_j\left(z_s,0,0\right)\,. \tag{9}$$

2.2 Модовые параболические уравнения

Для получения параболических аппроксимаций однородный аналог уравнения горизонтальной рефракции (9) представляется в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\sqrt{k_j^2\left(x,y\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\sqrt{k_j^2\left(x,y\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}}\right)A_j\left(x,y\right)=0\,, \tag{10}$$

и выделяется его решение, состоящее из волн, распространяющихся в положительном направлении оси x

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\sqrt{k_j^2\left(x,y\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}}\right)A_j\left(x,y\right)=0\,. \tag{11}$$

Вводя модовое опорное волновое число $k_{j,0}$ и выделяя главную осцилляцию из $A_j\left(x,y\right)$

$$A_j\left(x,y\right)=e^{ik_{j,0}x}\mathcal{A}_j\left(x,y\right)\,,$$

получим задачу Коши для псевдодифференциального модового параболического уравнения

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathcal{A}_j\left(x,y\right)}{\partial x}=ik_{j,0}\left(\sqrt{1+L_j}-1\right)\mathcal{A}_j\left(x,y\right)\,,\\ \mathcal{A}_j\left(0,y\right)=\mathcal{A}_{j,0}\left(y\right)\end{cases} \tag{12}$$

где

$$k_{j,0}^2L_j=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_j^2\left(x,y\right)-k_{j,0}^2\,.$$

2.3 Аппроксимация Паде

Для решения уравнения (12) необходимо выполнить линеаризацию оператора квадратного корня с использованием аппроксимации Паде. Пусть есть некоторая функция $F\left(\lambda\right)$ тогда её аппроксимация может быть записана в виде

$$F(\lambda) \approx \mathcal{R}(F, l, m)(\lambda) \equiv \frac{P^F_{l,m}(\lambda)}{Q^F_{l,m}(\lambda)}, \tag{13}$$

где $P^F_{l,m}(\lambda), Q^F_{l,m}(\lambda)$ обозначают многочлены порядка l и m соответственно [75]. Коэффициенты многочленов могут быть получены приравниванием рациональной функции $P^F_{l,m}(\lambda)/Q^F_{l,m}(\lambda)$ к разложению в ряд Тейлора функции $F(\lambda)$, содержащей $l+m+1$ членов.

2.3.1 Аппроксимация оператора квадратного корня

Аппроксимация оператора квадратного корня может быть записана в виде

$$ik_{j,0}\left(\sqrt{1+L_j}-1\right) \approx \frac{P_{l,m}(L_j)}{Q_{l,m}(L_j)}, \tag{14}$$

тогда

$$\frac{\partial \mathcal{A}_j(x,y)}{\partial x} = \frac{P_{l,m}(L_j)}{Q_{l,m}(L_j)} \mathcal{A}_j(x,y)\ . \tag{15}$$

Используя дискретизацию Крэнка-Николсон [76] на равномерной сетке $x = nh$, $\mathcal{A}^n_j \sim \mathcal{A}_j(x_n, y)$, уравнение (15) в положительном направлении оси x можно записать виде

$$D^+_h \mathcal{A}^n_j = \frac{P_{l,m}(L_j)}{Q_{l,m}(L_j)} \mathcal{A}^{n+1/2}_j, \tag{16}$$

где

$$D^+_h \mathcal{A}_j = \frac{\mathcal{A}^{n+1}_j - \mathcal{A}^n_j}{h}, \qquad \mathcal{A}^{n+1/2}_j = \frac{\mathcal{A}^{n+1}_j + \mathcal{A}^n_j}{2}.$$

Тогда, уравнение (16) может быть преобразовано к виду

$$\mathcal{A}^{n+1}_j = \frac{U_{l,m}(L_j)}{W_{l,m}(L_j)} \mathcal{A}^n_j, \tag{17}$$

где

$$U(L_j) = -hP_{l,m}(L_j) - 2Q_{l,m}(L_j)\ ,$$
$$W(L_j) = \quad hP_{l,m}(L_j) - 2Q_{l,m}(L_j)\ ,$$

многочлены степени $p = \max(l, m)$. Положив $l \leqslant m$ и разложив отношение ${}^{U(L_j)}/_{W(L_j)}$ на простые дроби, получим

$$\mathcal{A}_j^{n+1} = \left(a_{l,m}^0 + \sum_{i=1}^{p} \frac{a_{l,m}^i}{1 + b_{l,m}^i L_j}\right) \mathcal{A}_j^n\,. \tag{18}$$

2.3.2 Метод аппроксимации Паде для пропагатора

Другой подход к решению (12) был независимо предложен Авиловым [77] и Коллинзом [78]. В его основе лежит смена порядка дискретизации и применения аппроксимации Паде. При достаточно маленьком интервале $\Delta x = h$ уравнение (12) может быть формально решено в виде

$$\mathcal{A}_j^{n+1} = e^{ik_{j,0}h\left(\sqrt{1+L_j}-1\right)} \mathcal{A}_j^n\,. \tag{19}$$

Затем, применяя аппроксимацию Паде для экспоненты в виде разложения на простые дроби аналогично аппроксимации квадратного корня

$$e^{ik_{j,0}h\left(\sqrt{1+L_j}-1\right)} \approx \frac{\tilde{U}_{l,m}(L_j)}{\tilde{W}_{l,m}(L_j)} = \tilde{a}_{l,m}^0 + \sum_{i=1}^{p} \frac{\tilde{a}_{l,m}^i}{1 + \tilde{b}_{l,m}^i L_j}\,, \tag{20}$$

получим

$$\mathcal{A}_j^{n+1} = \left(\tilde{a}_{l,m}^0 + \sum_{i=1}^{p} \frac{\tilde{a}_{l,m}^i}{1 + \tilde{b}_{l,m}^i L_j}\right) \mathcal{A}_j^n\,. \tag{21}$$

Очевидно, что полиномы $\tilde{U}(L_j), \tilde{W}(L_j)$ отличаются от $U(L_j), W(L_j)$, также как и коэффициенты их разложения на простые дроби $\tilde{a}_{l,m}^i, \tilde{b}_{l,m}^i$ и $a_{l,m}^i, b_{l,m}^i$. Однако, в остальном уравнения (18) и (21) полностью идентичны. В дальнейшем символ $\tilde{(\cdot)}$ будет опущен, так как все рассматриваемые методы могут быть применены к обоим формам. В англоязычной литературе такой метод имеет название Split-step Padé.

2.4 Дискретизация оператора L_j

Для дискретизации уравнения (18) на равномерной сетке $y_q = y_0 + q\delta$ с шагом $\Delta y = \delta$ используется стандартная конечно-разностная схема

$$D_\delta^2 \mathcal{A}_j^{n+1} = \frac{\mathcal{A}_j^{n+1,q+1} - 2\mathcal{A}_j^{n+1,q} + \mathcal{A}_j^{n+1,q-1}}{\delta^2}, \quad q \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

где $\mathcal{A}_j^{n,q} \sim \mathcal{A}_j(x_n, y_q)$. Таким образом, уравнение (18) преобразуется к виду

$$\mathcal{A}_j^{n+1,q} = \left(a_{l,m}^0 + \sum_{i=1}^{p} \frac{a_{l,m}^i}{1 + b_{l,m}^i L_j^\delta} \right) \mathcal{A}_j^{n,q}, \quad q \in \mathbb{N}, \tag{23}$$

где $k_{j,0}^2 L_j^\delta = D_\delta^2 + k_j^2 - k_{j,0}^2$. Будем искать $\mathcal{A}_j^{n+1,q}$ в виде

$$\mathcal{A}_j^{n+1,q} = a_{l,m}^0 \mathcal{A}_j^{n,q} + \sum_{i=1}^{p} a_{l,m}^i \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q}, \tag{24}$$

тогда

$$a_{l,m}^0 \mathcal{A}_j^{n,q} + \sum_{i=1}^{p} a_{l,m}^i \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q} = \left(a_{l,m}^0 + \sum_{i=1}^{p} \frac{a_{l,m}^i}{1 + b_{l,m}^i L_j^\delta} \right) \mathcal{A}_j^{n,q}. \tag{25}$$

Приравнивая слагаемые при одинаковом i, получим набор выражений, из которых могут быть найдены значения вспомогательных функций $\mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q}$

$$\left(1 + b_{l,m}^i L_j^\delta\right) \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q} = \mathcal{A}_j^{n,q}, \quad i = \overline{1,p}. \tag{26}$$

Используя равенства (22) и $k_{j,0}^2 L_j^\delta = D_\delta^2 + k_j^2 - k_{j,0}^2$, получим

$$\underbrace{\frac{b_{l,m}^i}{k_{j,0}^2\delta^2}}_{\alpha_{j,i}}\mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q-1}+\underbrace{\left(1+\frac{b_{l,m}^i}{k_{j,0}^2}\left(k_j^2-k_{j,0}^2-\frac{2}{\delta^2}\right)\right)}_{\beta_{j,i}}\mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q}+\underbrace{\frac{b_{l,m}^i}{k_{j,0}^2\delta^2}}_{\gamma_{j,i}}\mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q+1}=\mathcal{A}_j^{n,q}\,. \quad (27)$$

Таким образом, коэффициенты $\mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q}$ могут быть легко найдены обращением матриц с диагоналями $\alpha_{j,i}, \beta_{j,i}, \gamma_{j,i}$ методом прогонки [79]. Уравнение (27) представляет собой численную схему решения уравнения (12).

2.5 Граничные условия

Одной из особенностей МПУ является то, что их решение всегда рассматривается в неограниченной области, в отличие от решения «обычных», или «вертикальных», параболических уравнений в подводной акустике, которое вычисляется в нескольких слоях, имеющих в качестве верхней границы поверхность океана и, как минимум в теории, некоторую границу на дне моря. Таким образом, искусственное ограничение вычислительной области является обязательным при численном решении МПУ. В рамках данной работы рассматривается два способа выполнения такого ограничения. В первом случае вычислительная область расширяется с обеих сторон с целью поглощения исходящих волн. Во втором, решение внутри области сопоставляется с решением, содержащим исходящие волны за её пределами, с использованием специальных искусственных граничных условий.

2.5.1 Согласованные поглощающие слои

Впервые метод согласованных поглощающих слоёв (perfectly matching layers, PML) для граничных условий был показан Беранже для уравнений Максвелла [80], а позднее Леви [81], Лу и Чжу [82] исследовали применимость этого метода для решения параболических уравнений. В основе PML лежит расширение вычислительной области с целью плавного поглощения волн исходящих из неё. Пусть требуется найти решение уравнения (12) в области $\Omega = [0, x_1] \times [y_0, y_1]$. Сформируем новую область $\overline{\Omega} = [0, x_1] \times [y_0 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon]$, расширив Ω на ε с обоих сторон вдоль оси y. Заменим оператор L_j в уравнении (12) оператором L_j^{PML}, определяемым как

$$k_{j,0}^2 L_j^{PML} = \frac{1}{1 + i\beta\left(y\right)} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{1 + i\beta\left(y\right)} \frac{\partial}{\partial y} + k_j^2 + k_{j,0}^2\,, \tag{28}$$

где $\beta\left(y\right)$ – некоторая гладкая функция, монотонно убывающая на интервале $[y_0 - \varepsilon, y_0)$, возрастающая на $(y_1, y_1 + \varepsilon]$, и $\beta\left(y\right) = 0$ при $y \in [y_0, y_1]$. Таким образом, оператор L_j^{PML} совпадает с оператором L_j внутри области Ω. На границах $y_0 - \varepsilon$, $y_1 + \varepsilon$ устанавливаются стандартные однородные условия Дирихле

$$\mathcal{A}_j\Big|_{y = y_0 - \varepsilon} = \mathcal{A}_j\Big|_{y = y_1 + \varepsilon} = 0\,. \tag{29}$$

Таким образом, применимость PML граничных условий зависит от значения параметра ε, который должен быть существенно большим, чтобы сгладить исходящие волны, и функции $\beta\left(y\right)$, которая в свою очередь должна существенно гладко достигать своего максимального значения при погружении в PML, так, при слишком быстром возрастании исходящие волны будут отражаться внутри поглощающего слоя.

В рамках данной работы была использована следующая функция $\beta\left(y\right)$

$$\beta\left(y\right) = \beta_0 \left(\frac{|y - y_b|}{\varepsilon}\right)^3 = \beta_0 \zeta^3 \equiv \beta\left(\zeta\right)\,, \quad \zeta \in [0, 1]\,, \tag{30}$$

где y_b – соответствующая граница области Ω, $\beta_0 \in \mathbb{R}_+$ – параметр масштаба.

2.5.1.1 Дискретизация оператора L_j^{PML}

Для дискретизации оператора L_j^{PML} на равномерной сетке $y_q = y_0 - \varepsilon + q\delta$ используется стандартная конечно-разностная схема для первой производной с половинным шагом

$$D^1_{\delta/2}F^q = \frac{F^{q+1/2} - F^{q-1/2}}{\delta}\,. \tag{31}$$

Таким образом, выражение (26) преобразуется к виду

$$\left(1 + b^i_{l,m}\,{}^q_\delta L^{PML}_j\right)\mathcal{B}^{n+1,q}_{j,i} = \mathcal{A}^{n,q}_j\,, \quad i = \overline{1,p}\,, \tag{32}$$

где

$$k^2_{j,0}\,{}^q_\delta L^{PML}_j = \frac{1}{1+i\beta\left(y_q\right)}D^1_{q/2}\left(\frac{1}{1+i\beta\left(y_q\right)}D^1_{q/2}\right) + k^2_j - k^2_{j,0}\,. \tag{33}$$

Используя равенства (31) и (33), получим

$$\underbrace{\frac{b^i_{l,m}\mu_q\mu_{q-1/2}}{k^2_0\delta^2}}_{\tilde{\alpha}^q_{j,i}}\mathcal{B}^{n+1,q-1}_{j,i} + \underbrace{\left(1 + \frac{b^i_{l,m}}{k^2_{j,0}}\left(k^2_j - k^2_{j,0} - \frac{\mu_q}{\delta^2}\left(\mu_{q-1/2} + \mu_{q+1/2}\right)\right)\right)}_{\tilde{\beta}^q_{j,i}}\mathcal{B}^{n+1,q}_{j,i} + \underbrace{\frac{b^i_{l,m}\mu_q\mu_{q+1/2}}{k^2_0\delta^2}}_{\tilde{\gamma}^q_{j,i}}\mathcal{B}^{n+1,q+1}_{j,i} = \mathcal{A}^{n,q}_j\,, \tag{34}$$

где $\mu_q = 1/(1+i\beta(y_q))$. Так как оператор L^{PML}_j совпадает с оператором L_j внутри области Ω, значения вспомогательных функций $\mathcal{B}^{n,q}_{j,i}$ в расширенной области $\overline{\Omega}$ могут быть найдены обращением матриц методом прогонки [79] с диагоналями $\tilde{\alpha}^q_{j,i}, \tilde{\beta}^q_{j,i}, \tilde{\gamma}^q_{j,i}$ на интервалах $[y_0 - \varepsilon, y_0)$, $(y_1, y_1 + \varepsilon]$ и $\alpha_{j,i}, \beta_{j,i}, \gamma_{j,i}$ на отрезке $[y_0, y_1]$.

2.6 Лучевая теория для уравнения горизонтальной рефракции

Предполагая, что волновые числа $k_j\left(x, y\right)$ являются медленно изменяющейся функцией, решение уравнения (9) с использованием лучевой теории распространения звука может быть выражено в виде

$$A_j(x,y) = M_j(x,y)\, e^{ik_{j,0}S_j(x,y)} + o\left({}^{1}/{}_{k_{j,0}}\right) , \tag{35}$$

где функция $S_j(x,y)$ называется эйконалом и может быть найдена из уравнения Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S_j(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_j(x,y)}{\partial y}\right)^2 = n_j(x,y) , \tag{36}$$

где $n_j(x,y) \equiv {}^{k_j(x,y)}/{}_{k_{j,0}}$ — индекс горизонтальной рефракции [83]. Амплитуда $M_j(x,y)$ может быть получена из уравнения переноса вида

$$2\left(\frac{\partial S_j(x,y)}{\partial x}\frac{\partial M_j(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial S_j(x,y)}{\partial y}\frac{\partial M_j(x,y)}{\partial y}\right) + \\ \left(\frac{\partial^2 S_j(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_j(x,y)}{\partial y^2}\right) M_j(x,y) = 0\,. \tag{37}$$

Решение этих уравнений связано с решением системы Гамильтона

$$\begin{aligned} \frac{dx_j(l)}{dl} &= \frac{\xi_j(l)}{n_j(x_j,y_j)}, & \frac{d\xi_j(l)}{dl} &= \frac{\partial n_j(x_j,y_j)}{\partial x_j}, \\ \frac{dy_j(l)}{dl} &= \frac{\eta_j(l)}{n_j(x_j,y_j)}, & \frac{d\eta_j(l)}{dl} &= \frac{\partial n_j(x_j,y_j)}{\partial y_j}, \end{aligned} \tag{38}$$

где l является натуральным параметром, обозначающим длину кривой вдоль траектории распространения луча, а ξ,η сопряжённые переменные к x,y — момент. Проекции решений этой системы из фазового пространства (x,y,ξ,η) на координатное (x,y) называются горизонтальными лучами, соответствующими вертикальным модам в океаническом волноводе.

2.6.1 Трассировка лучей, соответствующих вертикальным модам

2.6.1.1 Математическая постановка задачи

Задача трассировки лучей состоит в том, чтобы в области $\{(x, y, z_s)\, 0 \leqslant x \leqslant x_1, y_0 \leqslant y \leqslant y_1\}$ вычислить координаты распространения лучей, соответствующих вертикальным модам, из источника, имеющего координаты $(0, y_s, z_s)$, под углами распространения $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ и значениях натурального параметра кривой $l_0 \leqslant l \leqslant l_1$, задаваемые Гамильтовой системой задач Коши

$$
\begin{cases} \dfrac{dx_j\left(l\right)}{dl} = \dfrac{\xi_j\left(l\right)}{n_j\left(x_j, y_j\right)}\,, \\ x_j\left(0\right) = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_j\left(l\right)}{dl} = \dfrac{\partial n_j\left(x_j, y_j\right)}{\partial x_j}\,, \\ \xi_j\left(0\right) = \cos\alpha\,, \end{cases}
$$
$$
\begin{cases} \dfrac{dy_j\left(l\right)}{dl} = \dfrac{\eta_j\left(l\right)}{n_j\left(x_j, y_j\right)}\,, \\ y_j\left(0\right) = y_s\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\eta_j\left(l\right)}{dl} = \dfrac{\partial n_j\left(x_j, y_j\right)}{\partial y_j}\,, \\ \eta_j\left(0\right) = \sin\alpha\,. \end{cases} \tag{39}
$$

Каждое уравнение системы представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение, численное решение которых может быть выполнено с использованием методов Рунге-Кутты.

2.7 Начальные условия

2.7.1 Начальные условия Гаусса и Грина

От выбора начальных условий зависит устойчивость получаемого численного решения. Для параболических уравнений наиболее часто используется начальное условие Гаусса [75]

$$
\mathcal{A}_j\left(0, y\right) = \frac{\varphi_j\left(z_s\right)}{2\sqrt{\pi}} e^{-k_{j,0}^2 (y - y_s)}\,. \tag{40}
$$

Однако такое условие создаёт большой численный шум при использовании даже небольшого порядка аппроксимации квадратного корня. Также может быть использовано начальное условие Грина

$$\mathcal{A}_j\left(0,y\right) = \frac{\varphi_j\left(z_s\right)}{2\sqrt{\pi}}\left(1.4467 - 0.8402k_{j,0}^2\left(y-y_s\right)^2\right)e^{-\frac{k_{j,0}^2\left(y-y_s\right)^2}{1.5256}}\,, \tag{41}$$

которое обеспечивают большую, но всё ещё не идеальную стабильность.

2.7.2 Лучевые начальные условия

Для использования высоких порядков аппроксимации Паде необходимо начальное условие, учитывающее широкоугольные особенности решаемого уравнения. Такое условие может быть получено с использованием лучевой теории распространения звука. Предположим, что при $0 \leqslant x \leqslant x_0$, где x_0 сравнимо с длинной волны, свойства среды не зависят от x, то есть $k_j = k_j\left(y\right)$. Тогда, решение (12) может быть записано в виде

$$\mathcal{A}_j\left(x_0,y\right) = M_j\left(x_0,y\right)e^{ik_{j,0}S_j\left(x_0,y\right)} + o\left({}^1\!/\!{}_{k_{j,0}}\right)\,, \tag{42}$$

где $M_j\left(x,y\right)$ — амплитуда нулевого порядка, удовлетворяющая уравнению переноса (37), $S_j\left(x,y\right)$ — функция эйконала, удовлетворяющая уравнению Гамильтона-Якоби (36). Оба эти уравнения могут быть получены из решения системы Гамильтона (38) вдоль кривой распространения звукового луча в виде

$$S_j\left(y\left(l,\alpha\right)\right) = \int\limits_0^l n_j\left(y\left(\ell,\alpha\right)\right)d\ell\,, \tag{43}$$

$$M_j\left(y\left(l,\alpha\right)\right) = \frac{M_{j,0}}{n_j\left(y\left(l,\alpha\right)\right)}\sqrt{\frac{\cos\alpha}{{}^{\partial y\left(l,\alpha\right)}\!/\!{}_{\partial\alpha}}}\,, \tag{44}$$

где $M_{j,0} = {}^{e^{i\pi/4}}\!/_{\sqrt{8\pi k_{j,0}}}$ — амплитуда на расстоянии 1 м. от источника, $n_j(l) = {}^{k_j(l)}\!/_{k_{j,0}}$ – горизонтальный показатель преломления.

Так как значения функций $S_j(x_0, y)$ и $M_j(x_0, y)$ вычисляются лишь на небольшом расстоянии x_0 (несколько десятков метров), в большинстве случаев будет достаточно начального условия рассчитанного для однородной среды при $k_j(x, y) \equiv k_{j,0}$. В таком случае получим

$$\begin{aligned} S_j(y) &= r(y)\ , \\ M_j(y) &= \frac{M_{j,0}}{r(y)}\,, \\ r(y) &= \sqrt{x_0^2 + y^2}\,. \end{aligned} \tag{45}$$

2.8 Расчёт временных рядов в точках приёма при распространении импульсных акустических сигналов

2.8.1 Математическая постановка задачи

Задача состоит в вычислении в точках приёма $R = \{(x, y, z) \in \Omega\}$ области $\Omega = \left\{(x, y, z)\middle| x_0 \leqslant x \leqslant x_1, y_0 \leqslant y \leqslant y_1, 0 \leqslant z \leqslant z_b\right\}$ временного ряда импульса сигнала в источнике $S = (x_0, y_s, z_s)$, задаваемого функцией $g(t)\ , t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Импульс $I_r(t)$ в приёмнике r в спектральной области Фурье определяется следующей функцией (здесь и далее оператор $\hat{(\cdot)}$ означает функцию в спектральной области)

$$\hat{I}_r(\xi) = \overline{\hat{P}(x_r, y_r, z_r, \xi) \cdot e^{-i\tau\omega(\xi)}}\,, \tag{46}$$

где $\omega(\xi) = 2\pi f(\xi)$ – циклическая частота источника, $f(\xi)$ – частота источника, τ – время движения звука из источника в приёмник, $\overline{(\cdot)}$ – оператор комплексного сопряжения, $\hat{P}$ – функция сигнала в приёмнике

$$\hat{P}(x,y,z,\xi) = p(x,y,z,f(\xi)) \cdot \overline{\hat{g}}(\xi) \ , \tag{47}$$

здесь $p(x,y,z,f(\xi))$ – звуковое поле источника, вычисленное для частоты $f(\xi)$. Значение $\hat{g}(\xi)$ также может быть оценено как

$$\hat{g}(\xi) = \frac{\hat{I}_{r_0}(\xi)}{p(x,y,z,f(\xi))} \, , \tag{48}$$

где r_0 – индекс опорного источника.

2.9 Уровень звукового воздействия

Уровень звукового воздействия (sound exposure level, SEL) в области $\Omega = \left\{(x,y,z)\middle| x_0 \leqslant x \leqslant x_1, y_0 \leqslant y \leqslant y_1, z_0 \leqslant z \leqslant z_b\right\}$ для диапазона частот $[f_1, f_2]$ некоторого источника задаётся следующим интегралом

$$\mathrm{SEL}(x,y,z,f_1,f_2) = \int\limits_{f_1}^{f_2} \left|\hat{P}(x,y,z,\xi(f))\right|^2 df \, , \tag{49}$$

где $\hat{P}$ – функция сигнала в точке (x,y,z) (47). Полученная величина является достаточно грубой, поэтому при численном вычислении используется простой метод трапеций [84]

$$\mathrm{SEL}_{i,j,k} = d_f \sum_{s=0}^{n_f-1} \left|\hat{P}_{i,j,k,s}\right|^2 \tag{50}$$

на равномерной сетке

$$\begin{aligned}
&\mathrm{SEL}_{i,j,k} \approx \mathrm{SEL}\left(x_i, y_j, z_k, f_1, f_2\right)\,, \\
&\hat{P}_{i,j,k,s} = \hat{P}\left(x_i, y_j, z_k, \xi\left(f_s\right)\right)\,, \\
&x_i = x_0 + id_x\,, \qquad i = \overline{0, n_x - 1}\,, \\
&y_j = y_0 + jd_y\,, \qquad j = \overline{0, n_y - 1}\,, \\
&z_i = z_0 + kd_z\,, \qquad k = \overline{0, n_z - 1}\,, \\
&f_s = f_1 + sd_f\,, \qquad s = \overline{0, n_f - 1}\,.
\end{aligned} \tag{51}$$

2.10 Колебательные скорость и ускорение

Колебательное ускорение $\mathbf{a}\left(x, y, z\right)$ в области $\Omega = \left\{(x, y, z)\middle| x_0 \leqslant x \leqslant x_1, y_0 \leqslant y \leqslant y_1, z_0 \leqslant z \leqslant z_b\right\}$ может быть вычислено через градиент акустического давления

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = \left\{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right\} = -\frac{1}{\rho}\nabla p\,. \tag{52}$$

Используя модовое разложение (7) и извлекая главную осцилляцию $e^{ik_{j,0}x}$, запишем производные акустического давления по пространственным координатам

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial}{x}\left(e^{ik_{j,0}x}\mathcal{A}_j\varphi_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{ik_{j,0}x}\left(ik_{j,0}\mathcal{A}_j\varphi_j + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{A}_j\varphi_j\right)\right) = \\
\sum_{i=1}^{\infty} e^{ik_{j,0}x}\left(ik_{j,0}\mathcal{A}_j\varphi_j + \frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial x}\varphi_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\mathcal{A}_j\right)\,,
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \sum_{i=1}^{\infty} e^{ik_{j,0}x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathcal{A}_j\varphi_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{ik_{j,0}x}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial y}\varphi_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\mathcal{A}_j\right)\,, \tag{54}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \sum_{i=1}^{\infty} e^{ik_{j,0}x}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{A}_j\varphi_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{ik_{j,0}x}\mathcal{A}_j\frac{\partial \varphi_j}{\partial z}\,. \tag{55}$$

Удаление главной осцилляции позволяет перейти к производным по медленно изменяющимся функциям, что в свою очередь приводит к высокой численной стабильности при проведении численного дифференцирования даже простыми конечными разностями.

Колебательная скорость $\mathbf{v}\,(x, y, z)$ также может быть выражена через градиент акустического давления. Используя тот факт, что в частотной области $\mathbf{a} = -i\omega\mathbf{v}$ получим

$$\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\} = \left\{\frac{i}{\omega}a_x, \frac{i}{\omega}a_y, \frac{i}{\omega}a_z\right\} = -\frac{i}{\omega\rho}\nabla p\,. \tag{56}$$

Глава 3
Реализация метода расчёта акустических полей и его верификация на модельных задачах

3.1 Описание программной реализации метода расчёта акустических полей

В рамках данной работы была разработана программа, реализующая методы моделирования звука, описание которых было приведено в Главе 2. Исходный код программы расположен в открытом доступе по адресу: https://github.com/GoldFeniks/Ample. В рамках данной работы было сделано 162 коммита, добавлено 18028 и удалено 8505 строк кода на языке программирования C++.

3.1.1 Средства реализации

В качестве основного языка программирования для реализации проекта был выбран язык C++20 [85], ввиду следующих соображений:

1. C++ является современным кроссплатформенным развивающимся языком программирования;

2. C++ позволяет проводить эффективное управление памятью;

3. C++ поддерживает параллельные вычислению;

4. Программы, написанные на языке C++, зачастую работают быстрее аналогичных программ, написанных на других языках программирования;

5. Стандартная библиотека C++ имеет широкий функционал;

6. Для C++ существует большой набор библиотек, упрощающих разработку;

7. Пакет CAMBALA [74] написан на C++, что упрощает его интеграцию.

3.1.2 Требования к аппаратному обеспечению

- Процессор Intel Core i7 2.5 ГГц;
- 8 Гб оперативной памяти.

3.1.3 Требования к программному обеспечению

- ОС Linux 5.12.2 и выше, и другие ОС, для которых существует компилятор языка C++20 [85];
- Библиотека Boost [86] версии 1.69 и выше;
- Библиотека nlohmann/json [87] версии 3.9.1 и выше;
- Библиотека FFTW [88, 89] версии 3.3.9 и выше.

3.1.4 Требования к пользователю

- Умение пользоваться командной строкой;
- Понимание работы с текстовыми и бинарными файлами;
- Знание формата JSON [90];
- Понимание предметной области.

3.1.5 Используемые модули

- CAMBALA [74] – используется для вычисления модовых функций и соответствующих им горизонтальных волновых чисел (см. 2.1);
- DORK [91] – реализация обобщённого метода Рунге-Кутты и плотной выдачи [92], используется при вычислении координат распространения лучей, соответствующих вертикальным модам (см. 2.6.1);
- delaunay [93] – реализация S-hull алгоритма триангуляции [94], используется для интерполяции данных гидрологии на облаке точек;
- zip [95] – C++ реализация функции zip, аналогично языку программирования Python.
- Eigen [96] – библиотека, содержащая различные инструменты для работы с элементами линейной алгебры: векторы, матрицы, численные методы и прочие алгоритмы.

3.1.6 Структура проекта

- `boundary_conditions` – содержит реализацию PML граничных условий с возможностью использования произвольной функции $\beta(y)$;
- `coefficients` – функции для вычисления аппроксимаций Паде произвольного порядка;
- `config` – класс, предоставляющий интерфейс взаимодействия с конфигурационным файлом (см. конфигурационный файл);
- `initial_conditions` – класс для вычисления различных начальных условий: начальное условие Гаусса (40), начальное условие Грина (41), обобщённый источник Гаусса [75], лучевые начальные условия (см. 2.7.2);

- `modes` – класс для многопоточного вычисления модовых функций и горизонтальных волновых чисел с использованием пакета CAMBALA [74];

- `rays` – класс для вычисления распространения звуковых лучей;

- `solver` – класс, реализующий многопоточное вычисление решения задачи (12).

3.1.6.1 io

Содержит инструменты для чтения и вывода данных.

- `convertors` – функции для преобразования комплексных значений и точек в формат JSON и обратно;

- `reader` – функции чтения многомерных данных из текстовых и бинарных потоков с проверкой соответствия заданному описанию размерностей;

- `writer` – класс для вывода данных в текстовые и бинарные файлы.

3.1.6.2 threads

Содержит инструменты управления и взаимодействия с многопточными вычислениями.

- `buffer_manager` – класс, позволяющий производить безопасные чтение и запись буферов данных из разных потоков выполнения программы;

- `pool` – класс, реализующий многопоточную очередь выполнения задач;

- `task` – класс, описывающий единичную задачу многопоточных вычислений.

3.1.6.3 utils

Содержит вспомогательные инструменты используемые остальными модулями программы.

- `assert` – функции вывода ошибок при несоответствии заданным условиям;
- `callback` – набор инструментов для создания и комбинирования функций обратного вызова;
- `comparators` – функции сравнения произвольных элементов;
- `concepts` – описание концептов для упрощения типизации данных;
- `differentiation` – классы и функции для вычисления первой производной по трём точкам в одно-, двух- и трёхмерном случаях;
- `dimensions` – класс, описывающий измерения входных и выходных данных (см. описание входных данных);
- `event` – класс, описывающий интерфейс события, для упрощения взаимодействия с процессом вычисления решения;
- `fft` – класс, описывающий вещественное и комплексное быстрые преобразования Фурье, упрощающие использование библиотеки FFTW [88, 89];
- `interpolation` – реализует различные виды интерполяции [97, 98]: линейная, билинейная, трилинейная, интерполяция Делонэ;

- `join` – функции конкатенации произвольного количества строк с произвольным разделителем;
- `multi_optional` – класс, описывающий кортеж элементов различных типов, при этом каждый элемент не обязательно содержится в коллекции, аналогично `std::optional` [99];
- `object_descriptor` – класс, описывающий тип и параметры некоторого объекта, использующийся в конфигурационном файле (см конфиг);
- `progress_bar` – класс, отображающий в консоли прогресс выполнения некоторого процесса;
- `to_string_helper` – класс, упрощающий преобразование различных типов данных в строковое представление;
- `types` – набор типов, используемых в программе;
- `utils` – набор вспомогательных функций различного назначения;
- `verbosity` – функции управления уровнем выводимой информации во время работы программы.

3.1.6.4 main

Содержит основную логику работы программы:

- функция `main`, являющаяся точкой входа в программу;
- обработка аргументов командной строки с использованием библиотеки Boost [86];
- чтение и обработка конфигурационных данных;
- запуск вычислений и вывод результата.

3.1.7 Аргументы командной строки

Запуск программы производится из командной строки следующим образом

```
./AMPLE [jobs] [options]
```

Аргумент `jobs` задаёт список вычислений разделённых символом пробел, которые необходимо выполнить. Допустимыми значениями являются:

- `solution` – решение уравнения Гельмгольца (1), является значением по умолчанию;
- `modes` – модовые функции и волновые числа, используя пакет CAMBALA [74];
- `init` – начальные условия;
- `rays` – траектории распространения звуковых лучей;
- `sel` – интегральная характеристика SEL (49);
- `impulse` – импульсы сигнала источника в приёмниках;
- `acceleration` – колебательные ускорения по пространственным координатам x, y, z.

При этом некоторые задачи зависят от других, в результате чего последние будут выполнены и без явно их указания в списке аргументов, однако результаты этих вычислений не будут сохранены. Аргумент `options` представляет собой произвольный набор опций программы, описание которых приведено далее.

3.1.7.1 Основные опции

- `-h [--help]` – отображает информацию об аргументах командной строки и завершить выполнение;

- `-v [--verbosity] arg` – задаёт уровень информации, отображаемой во время работы программы, допустимые значения
  - 0 – ничего не отображать (значение по умолчанию),
  - 1 – отображать время работы,
  - 2 – показывать прогресс выполнения задачи,
  - 3 – дополнительно к 2 вывести краткую информацию о задаче и среде;
- `-c [--config] path` – задаёт путь к конфигурационному файлу, значение по умолчанию – `"config.json"`.

3.1.7.2 Опции вывода

- `-o [--output] path` – задаёт путь к папке для вывода результатов вычислений, значение по умолчанию – `"output"`;
- `--row_step k` – выводить каждую k – ую вычисленную строку, значение по умолчанию – 10;
- `--col_step k` – выводить каждый k – ый вычисленный столбец, значение по умолчанию – 1;
- `--binary` – использовать бинарный формат выходных файлов вместо текстового.

3.1.7.3 Опции вычислений

- `-w [--workers] arg` – задаёт количество потоков, используемых для вычислений, значение по умолчанию – 1;
- `-b [--buff] arg` – задаёт размер буфера, используемого во время параллельных вычислений, значение по умолчанию – 100.

3.1.8 Формат входных данных

Основным входным файлом программы является конфигурационный файл в формате JSON [90], содержащий информацию о параметрах среды, сетки вычислительной области, координатах приёмника и источника, свойствах начальных условий и численного решения. Примеры конфигурационных файлов даны в Приложении А.

3.1.8.1 Типы данных

В дополнение к стандартным типам JSON в конфигурационном файле используются следующие типы:

- `complex` – комплексное число, представляемое одним из следующих способов
  - вещественное число, мнимая часть равна 0;
  - список, состоящий из двух вещественных чисел – вещественная и мнимая часть числа соответственно;
  - JSON объект, имеющий два поля, значения которых – вещественные числа: `real` – вещественная часть числа, `imag` – мнимая часть числа;
- `point` – произвольная точка в пространстве $\mathbb{R}^3$, представляемая одним из следующих способов
  - список, состоящий из трёх вещественных чисел – координаты точки x, y, z соответственно;
  - JSON объект, имеющий три вещественных поля `x`, `y`, `z` – координаты точки.

Типы табличных данных, содержащихся в файлах, указаны в Таблице 1.

Таблица 1 – Типы табличных данных

Тип данных	Текстовый файл	Бинарный файл
`double`	вещественное число, понимаемое стандартной библиотекой языка C++	IEEE double [100]
`complex`	два числа типа `double`, разделённых символом пробел	16 байт – два числа типа `double`
`point`	три числа типа `double`, разделённых символом пробел	24 байта – три числа типа `double`

3.1.8.2 Поля конфигурационного файла

Простые поля конфигурационного файла (скалярные значения и списки) указаны в Таблице 2.

Следующие поля конфигурационного файла задаются JSON объектами и строками

- `init` – тип используемых начальных условий, допустимые значения: `"gauss"` (40), `"greene"` (41), `"ray_simple"` (45).

- `tapering` – параметры сглаживания начальных условий на границах области, задаются JSON объектом, описанным в Таблице 3.

- `coefficients` – параметры аппроксимации квадратного корня, задаются JSON объектом, описанным в Таблице 4.

- `boundary_conditions` – параметры граничных условий, задаются JSON объектом, описанным в Таблице 5.

- `input_data` – список входных многомерных данных, формат которых описан в 3.1.8.3. Также может являться строкой, задающей путь к файлу JSON, содержащему объект в том же формате. Для восстановления значений в промежуточных точках используется соответствующая количеству измерений линейная интерполяция [97]. Допустимы следующие категории данных

- `bathymetry` – значения глубин дна, имеет 2 измерения, x и y соответственно.
- `hydrology` – значения профилей скорости звука в воде, имеет 2 измерения, z и x соответственно, специальное значение -1 означает, что скорость звука в данной точке не известна, для получения значений в промежуточных точках используется интерполяция Делонэ [98].
- `phi_s` – значения модовых функций в источнике, имеет одно рваное измерение – количество мод в зависимости от номера частоты, не может иметь значений координат.
- `phi_j` – значения модовых функций в среде, имеет 4 измерения: количество мод в зависимости от номера частоты, x, y, z; первое измерение является рваным и не может иметь значений координат.
- `frequencies` – одномерный список значений частот при которых нужно вычислить звуковое поле, не может иметь значений координат.
- `receivers` – одномерный список точек приёма в формате `point`, измерение не может иметь значений координат.
- `k0` – вещественные значения волновых чисел источника, имеет одно рваное измерение – количество мод в зависимости от номера частоты, не может иметь значений координат.
- `complex_k0` – комплексные значения волновых чисел источника, аналогично `k0`.
- `k_j` – вещественные значения волновых чисел в среде, имеет 3

измерения: количество мод в зависимости от номера частоты, x, y; первое измерение является рваным и не может иметь значений координат.

- `complex_k_j` – комплексные значение волновых чисел в среде, аналогично `k_j`.
- `source_function` – одномерный список значений функции источника или приёмника в зависимости от времени.
- `source_spectrum` – одномерный список комплексных значений спектра источника или приёмника в зависимости от частоты, не может быть одновременно указан с `frequences`.

Таблица 2 – Простые поля конфигурационного файла

Имя	Тип значения	Знач. по ум.	Описание
mode_subset	double	-1	подмножество вычисляемых мод
ppm	integer	2	количество точек на 1 метр при вычислении мод
ord_rich	integer	3	порядок аппроксимации Ричардсона [101]
max_mode	integer	-1	максимальное количество используемых мод
n_modes	integer	0	использовать такое количество мод
n_layers	integer	1	количество водяных слоёв
x0 x1 nx	double double integer	0 - -	параметры вычислительной области по координате x
y0 y1 ny	double double integer	- - -	параметры вычислительной области по координате y
z0 z1 nz	double double integer	- - -	параметры вычислительной области по координате z
y_s	double	0	координата y источника
z_s	double	-	глубина источника
bottom_rhos	double[]	[1.5]	значения плотностей слоёв дна
bottom_layers	double[]	[500]	значения глубин слоёв дна
bottom_c1s bottom_c2s	double[] double[]	[1700] [1700]	значения скорости звука на верхней и нижней границах дна
betas	double[]	[0,0.5]	значения параметра β (6)
complex_modes	bool	true	учитывать затухание (использовать мнимую часть коэффициента (6))
const_modes	bool	true	считать, что моды не зависят от x
additive_depth	bool	false	глубины донных слоёв задаются относительно глубины дна
a0 a1 na	double double integer	-pi/4 pi/4 90	параметры вычислительной сетки по углу при вычислении звуковых лучей
l0 l1 nl	double double integer	0 4000 4001	параметры вычислительной сетки по натуральному параметру при вычислении звуковых лучей
mnx mny	integer integer	- -	количество точек по осям x и y при вычислении мод

Окончание таблицы 2

Имя	Тип значения	Знач. по ум.	Описание
`tolerance`	`double`	`0.02`	минимальное относительное значение функции источника
`reference_index`	`integer`	`0`	индекс опорного источника (48)
`sel_range`	`double[]`	`[-1,-1]`	диапазон частот для SEL (см. 2.9)
`sel_strict`	`bool`	`false`	учитывать только частоты из диапазона `sel_range`

Таблица 3 – Описание значения поля `tapering`

Поле		Тип значения	Описание
`type`		`string`	`"angeled"` – сглаживает начальное условие в угловом интервале, является значением по умолчанию `"percentage"` – сглаживает начальное условие на части сетки
`parameters`	`left` `right`	`double`	значения левого и правого интервалов сглаживания
	`value`	`double`	одно значение для `left` и `right`, по умолчанию – 0.1

Таблица 4 – Описание значения поля `coefficients`

Поле		Тип значения	Описание
`type`		`string`	`"wampe"` – коэффициенты для метода 2.3.1 `"ssp"` – коэффициенты для метода 2.3.2, является значением по умолчанию
`parameters`	`n`	`integer`	степень полинома знаменателя, по умолчанию – 1
	`m`		степень полинома числителя, если опущено, используется значение `n`

Таблица 5 – Описание значения поля `boundary_conditions`

<table>
<tr><th colspan="2">Поле</th><th>Тип значения</th><th>Описание</th></tr>
<tr><td colspan="2"><code>type</code></td><td><code>string</code></td><td><code>"pml"</code> – PML граничные условия (см. 2.5.1)</td></tr>
<tr><td rowspan="2"><code>parameters</code></td><td><code>width</code></td><td><code>integer</code></td><td>ширина граничных условий в точках</td></tr>
<tr><td><code>function</code></td><td><code>object</code></td><td>описание функции $\beta(\zeta)$ (см. Таблицу 6)</td></tr>
</table>

Таблица 6 – Описание функции $\beta(\zeta)$

<table>
<tr><th colspan="2">Поле</th><th>Тип значения</th><th>Описание</th></tr>
<tr><td colspan="2"><code>type</code></td><td><code>string</code></td><td><code>"cubic"</code> – функция (30)
<code>"tabular"</code> – функция, заданная таблично на отрезке $[0, 1]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"><code>parameters</code></td><td><code>scale</code></td><td><code>double</code></td><td>параметр масштаба β_0</td></tr>
<tr><td><code>values</code></td><td><code>double[]</code></td><td>значения функции</td></tr>
</table>

3.1.8.3 Описание многомерных данных

Многомерные данные описываются следующим JSON объектом

- `type` – категория описываемых данных, например `"hydrology"`;
- `dimensions` – описание размерностей данных, представляет собой список, состоящий из комбинации следующий значений
  - вещественное число – количество элементов измерения;
  - JSON объект, формат которого описан в Таблице 7, поля `values` и `bound` не могут быть указаны одновременно, но могут отсутствовать, в этом случае координаты измерения считаются равномерно распределёнными на отрезке $[0, 1]$, также указание координат может быть недопустимо для некоторых измерений определённых категорий данных (например, количество приёмников);
  - список указанных выше значений, в этом случае измерение задаётся несколько раз, так называемое «рваное» измерение (например количество мод в зависимости от номера частоты).
- `values` – список значений многомерных данных, при этом каждое отдельное измерение может быть заменено на путь к файлу, содержащему данные;
- `binary` – являются файлы указанные в `value` бинарными.

Таблица 7 – Описание измерения

Поле	Тип значения	Описание
n	integer	количество элементов измерения
values	double[]	явные значения координат
	string	путь к текстовому файлу, содержащему значения координат
bounds	object	описание равномерной сетки координат согласно Таблице 8

Таблица 8 – Описание равномерной сетки координат

Поле	Тип значения	Описание
a	double	левая граница интервала
b	double	правая граница интервала
d	double	шаг сетки, игнорируется во входных данных

3.1.8.4 Описание выходных данных

Выходные записываются в папку, указываемую аргументами командной строки (см. 3.1.7), если такой папки не существует, она будет создана автоматически. В случае наличия конфликтующих файлов они будут перезаписаны. В результате работы программы будут созданы файлы `config.json` и `meta.json`, а также папки, содержащие многомерные выходные данные. Файл `config.json` содержит информацию из конфигурационного файла, указанного при запуске программы, а также значения параметров, которые были использованы во время работы, но не были явно указаны. Файл `meta.json` содержит следующие поля

- `command_line_arguments` – аргументы командной строки переданные при запуске программы.
- `computation_time` – время выполнения в секундах.
- `f` – список частот, использованных во время вычислений.
- `jobs` – список выполненных вычислений.
- `original_config_path` – путь к конфигурационному файлу, указанный в аргументах командной строки.
- `outputs` – список описаний многомерных выходных данных, аналогично `input_data`. Возможные следующие категории
  - `phi_j`, `k_j`, `phi_s`, `k0`, `complex_k0` – аналогично `input_data`;
  - `init` – начальные условия, использованные во время вычислений, имеет 2 измерения: количество мод и y;
  - `rays` – пары координат (x, y) распространения звуковых лучей, имеет 3 измерения: количество мод, α, l (см. 2.6.1);

- `sel` – значения SEL в вычислительной области, имеет 3 измерения: x, y, z;
- `impulse` – импульс источника вычисленный в точках приёма, имеет 2 измерения: номер приёмника и время (см. 2.8);
- `solution` – вычисленное звуковое поле, имеет 4 координаты: номер частоты и x, y, z;
- `acceleration_x`, `acceleration_y`, `acceleration_z` – колебательные ускорения по соответствующим пространственным координатам, имеют 4 координаты: номер частоты и x, y, z.

Данные, зависящие от частоты, будут сохранены в отдельных папках, содержащих файл `meta.json`, описывающий эти данные, и отдельные файлы с данными для каждой частоты, имеющие названия `frequency.(txt|bin)`, где `frequency` – частота при которой были получены данные. Измерения, представляющие собой количество мод, имеют разный размер в зависимости от номера частоты, для которой выполняются расчёты.

3.2 Вычислительные эксперименты

3.2.1 Волновод мелкого моря с плоским дном

Проверка корректности работы вычислительных схем и PML граничных условий была проведена на примере моделирования акустических волн в волноводе Пекериса, являющимся волноводом с постоянной глубиной дна, поэтому волновые числа постоянны, а модовые функции зависят только от глубины. В рамках такой задачи известно аналитическое решение, которое может быть записано как [75]

$$p\left(x,y,z\right) = \frac{i}{4}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j\left(z_s\right)\varphi_j\left(z\right)H_0^{(1)}\left(k_j\sqrt{x^2+y^2}\right), \tag{57}$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля нулевого порядка первого рода [102]. При проведении экспериментов были установлены следующие параметры

- источник расположен на глубине $z_s = 100$ м;
- глубина дна равна 200 м;
- частота источника равна $f = 25$ Гц;
- звуковое поле вычисляется на глубине $z = 30$ м на равномерной сетке

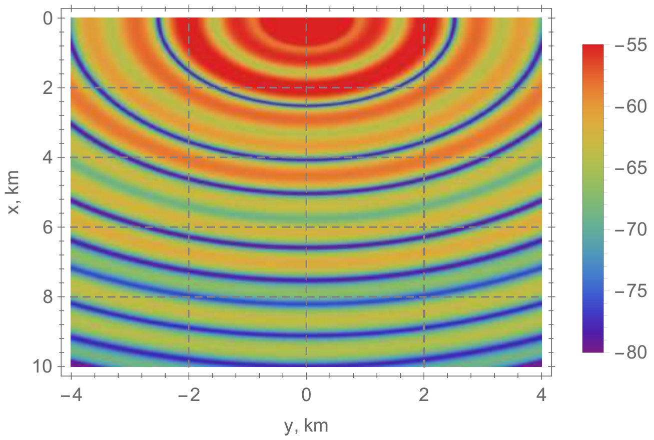
$$\begin{aligned} &y_0 = -4 \text{ км}\,, \quad y_1 = 4 \text{ км}\,, \quad n_y = 8001\,, \\ &x_0 = 50 \text{ м} \qquad x_1 = 10 \text{ км}\,, \quad n_x = 10001\,; \end{aligned} \tag{58}$$

- ширина PML слоёв равнялась 500 точек с обоих сторон вычислительной области, параметр масштаба равен $\beta_0 = 5$ (см. 2.5.1);
- использовались простые лучевые начальные условия (45) с апертурой $\alpha \approx \pm 89.95°$;
- количество потоков вычисления 4.

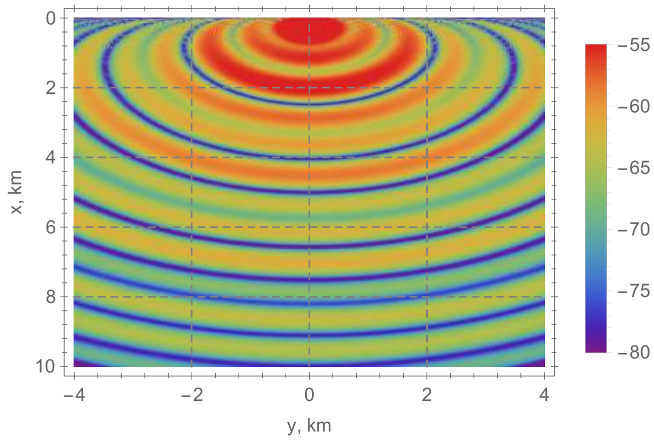
При таких параметрах среды имеются три захваченные (водные) моды. Звуковое поле было вычислено методом SSP (см. 2.3.2) с использование разных порядков аппроксимации Паде, результаты вычислений показаны на Рисунке 1. Сравнение проводилось с аналитическим решением и решением, полученным предыдущей версией программы с начальным условием Грина и аппроксимацией Клаербоута квадратного корня [103]. Из рисунка видно, что использование лучевых начальных условий и большего порядка аппроксимации позволяет добиться существенно лучших результатов по сравнению с обычным широкоугольным параболическим уравнением, при этом апертура решения является явно выраженной. При $p = 17$ полученное решение почти не отличается от аналитического, что говорит о том, что численная схема позволяет получать решение любой апертуры. Использование метода Крэнка-Николсон (см. 2.3.1) ожидаемо показывает такие же результаты, таким образом, свойства полученного решения не зависят от выбора численной схемы. Время выполнения программы указано в Таблице 9. Принцип работы поглощающих слоёв PML изображён на Рисунке 3, звуковое поле постепенно затухает при движении вглубь слоя. На Рисунке 2 показаны результаты вычисления акустического поля с использованием начального условия Грина. Полученное таким образом решение значительно хуже сохраняет широкоугольные свойства уравнения, образуя численный шум в начале вычислительной области. Время, затраченное на проведение вычислений, отображено в Таблице 9.

Таблица 9 – Время вычисления звукового поля в волноводе Пекериса

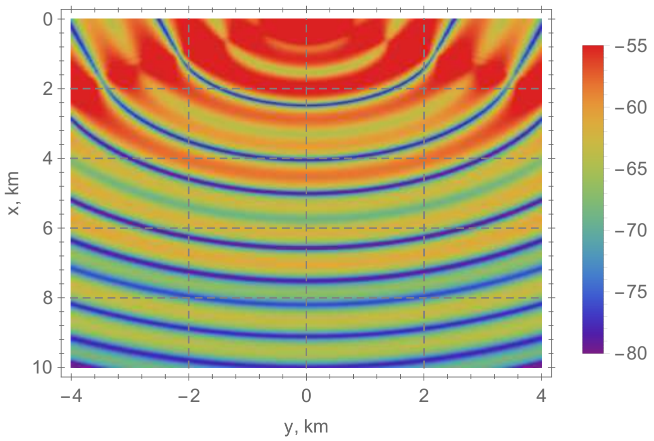
Порядок аппроксимации	Время работы, с	Порядок аппроксимации	Время работы, с
1	4.6	9	15.029
5	9.624	17	25.928



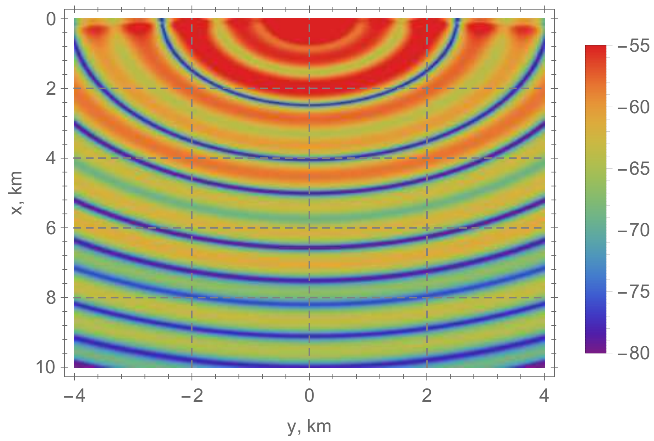
(a) Аналитическое решение



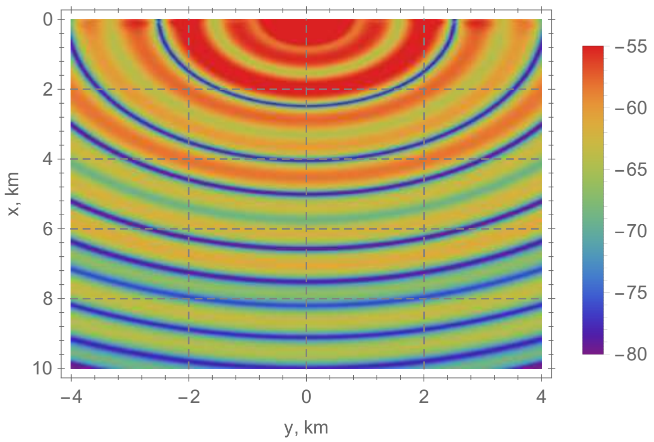
(b) Решение ШМПУ



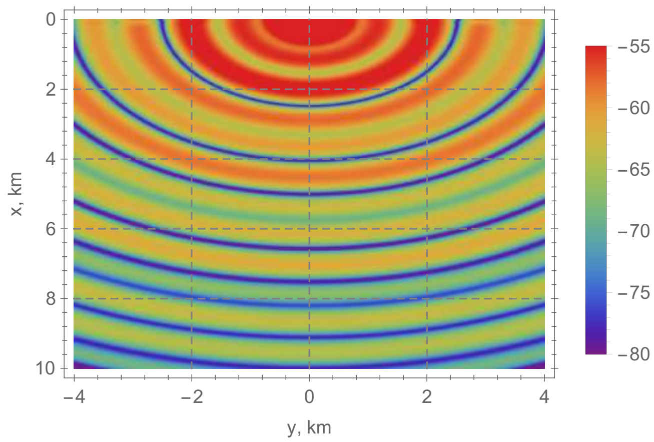
(c) SSP, $p = 1$



(d) SSP, $p = 5$

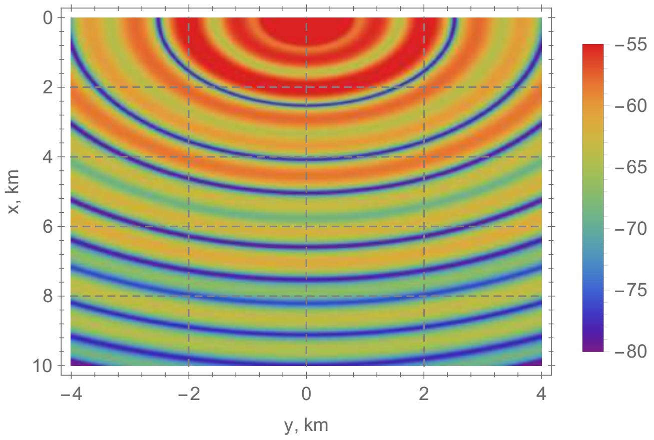


(e) SSP, $p = 9$

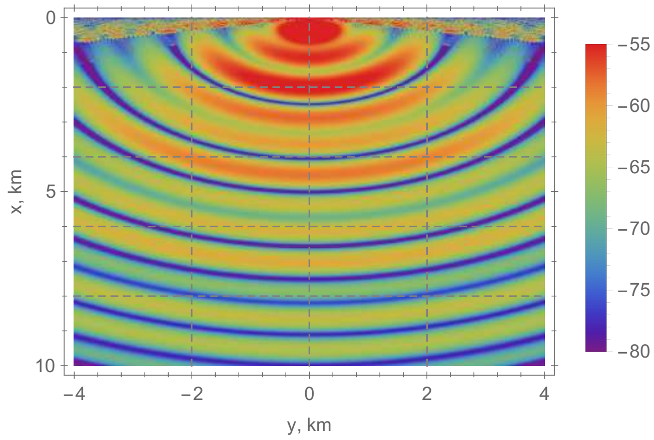


(f) SSP, $p = 17$

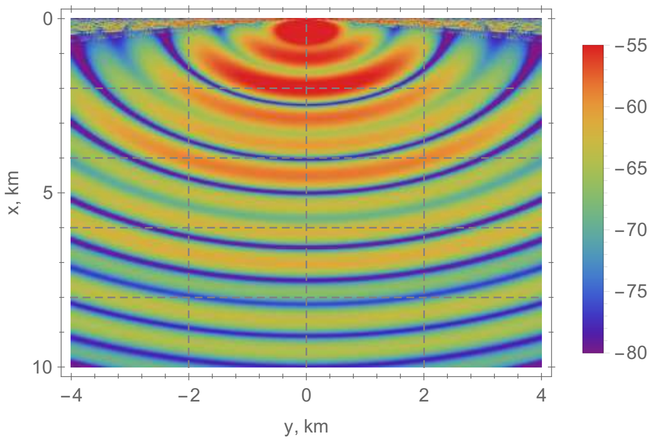
Рисунок 1 – Акустическое поле (в дБ отн. 1 м.) в волноводе Пекериса на глубине $z = 30$ м. с использованием лучевых начальных условий



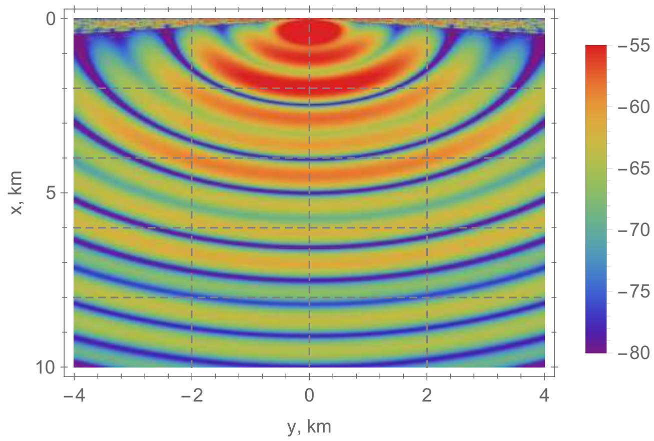
(a) Аналитическое решение



(b) SSP, $p = 5$



(c) SSP, $p = 9$



(d) SSP, $p = 17$

Рисунок 2 – Акустическое поле (в дБ отн. 1 м.) в волноводе Пекериса на глубине $z = 30$ м. с использованием начального условия Грина

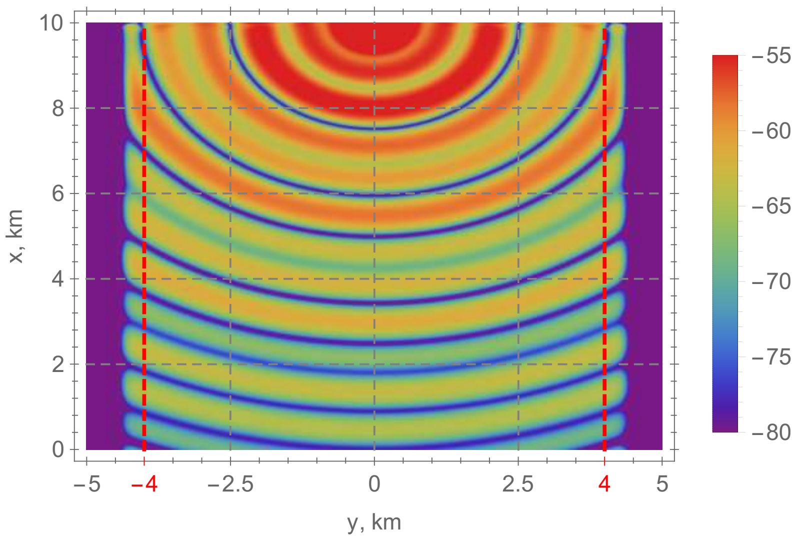


Рисунок 3 – Акустическое поле (в дБ отн. 1 м.) в волноводе Пекериса на глубине $z = 30$ м., слои PML отмечены красной пунктирной линией, ширина слоёв составляет 1000 точек, порядок аппроксимации $p = 13$

3.2.2 Волновод мелкого моря с подводным каньоном

Следующим вычислительным экспериментом является моделирование распространения звуковых волн, создаваемых точечным источником в мелком море с подводным каньоном, схематическое изображение такого волновода изображено на Рисунке 4. Рельеф дна описывается функцией

$$z = h\left(y\right) = h_0 + \Delta h \, \mathrm{sech}^2\left(\sigma y\right) \; . \tag{59}$$

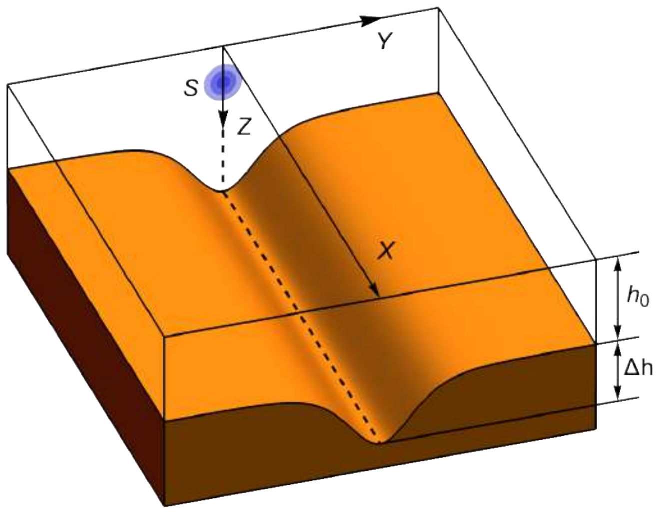


Рисунок 4 – Схематическое изображение подводного каньона

В данном эксперименте были использованы следующие параметры

$$\begin{gathered} h_0 = 50 \text{ м}\,, \quad \Delta h = 5 \text{ м}\,, \quad \sigma = 0.005\,, \\ z_s = 10 \text{ м}\,, \quad p = 11\,, \quad \alpha \approx \pm 86^\circ\,, \\ x_0 = 50 \text{ м}\,, \quad x_1 = 30 \text{ км}\,, \quad n_x = 30001\,, \\ y_0 = -1 \text{ км}\,, \quad y_1 = 1 \text{ км}\,, \quad n_y = 2001\,, \end{gathered} \tag{60}$$

при которых на частоте $f = 120$ Гц имеются четыре захваченные моды. Звуковое поле было вычислено с порядком аппроксимации $p = 11$, результаты вычислений отображены на Рисунке 6, время вычисления составило

22.791 с. На рисунках хорошо видно, как звук фокусируется в каньоне. Решение, полученное предыдущей версией программы почти не отличается от решения, полученного методом SSP, что подтверждает теорию о том, что в рамках данной задачи апертура уравнения играет незначительное роль. На Рисунке 5 полученное решение сравнивается с решением трёхмерного параболического уравнения [72, 73, 65]. Из рисунка видно, что решения достаточно сильно совпадают, как и в случае с широкоугольным параболическим уравнением [103].

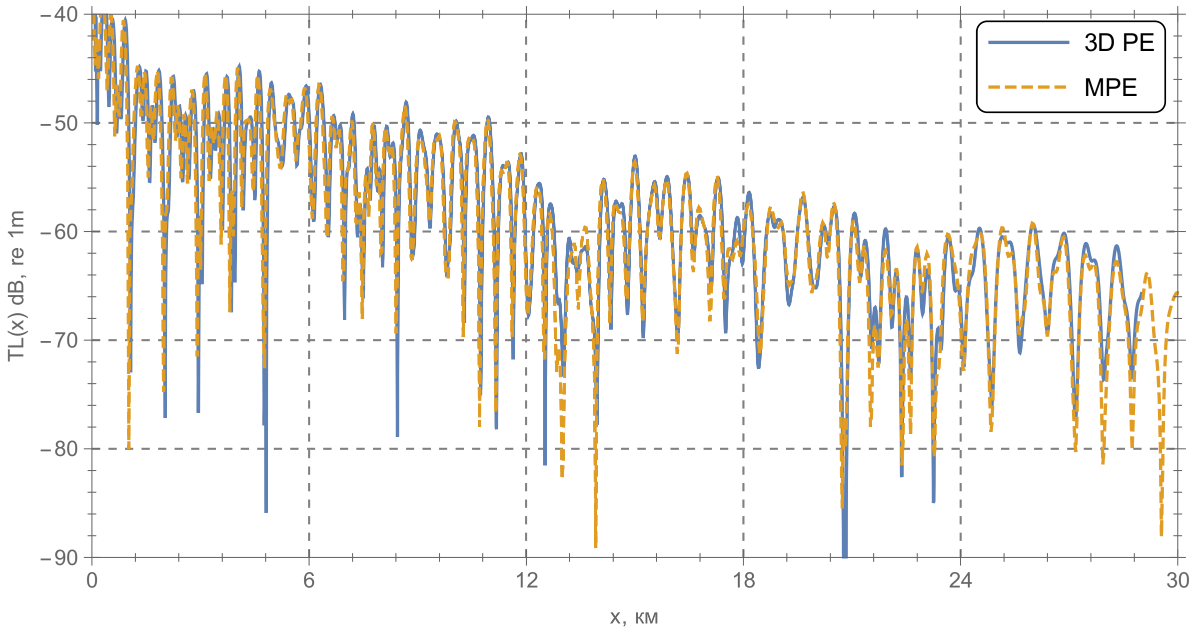
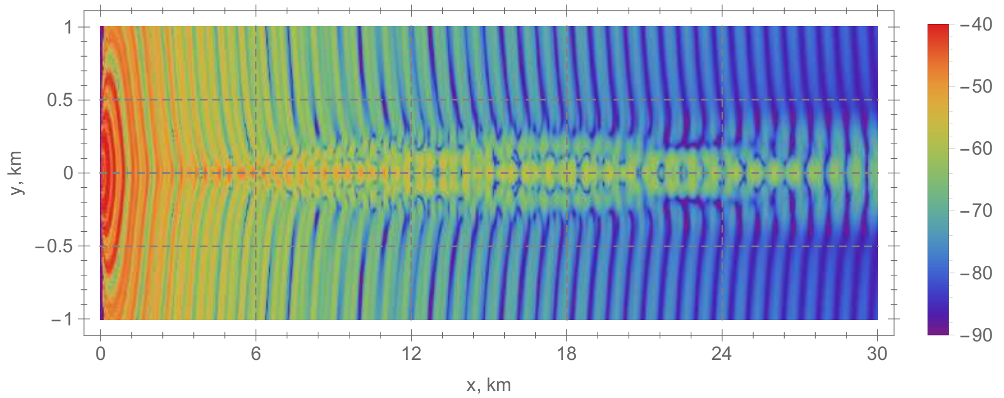
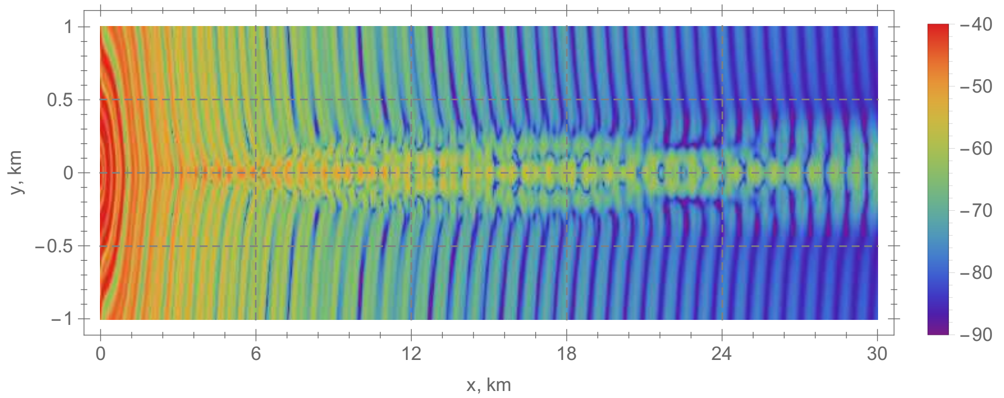


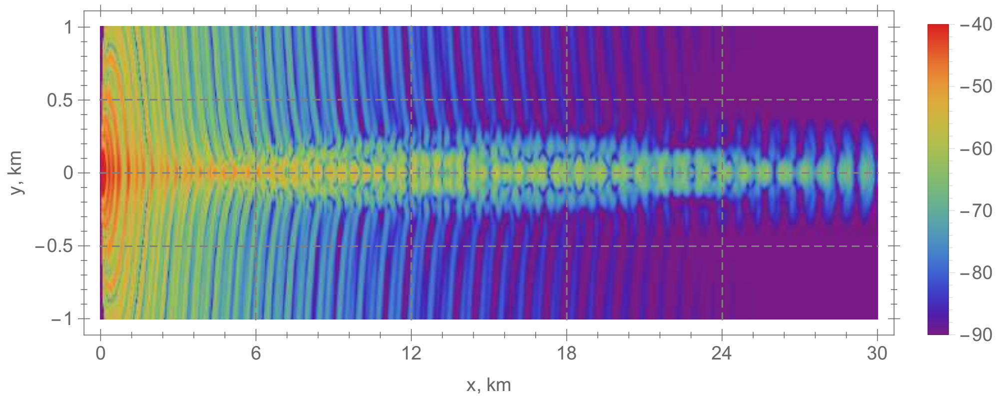
Рисунок 5 – Сравнение результатов вычисления акустического поля (в дБ отн. 1 м.) в мелком море с подводным каньоном при $y = 0$ км. на глубине $z = 10$ м.



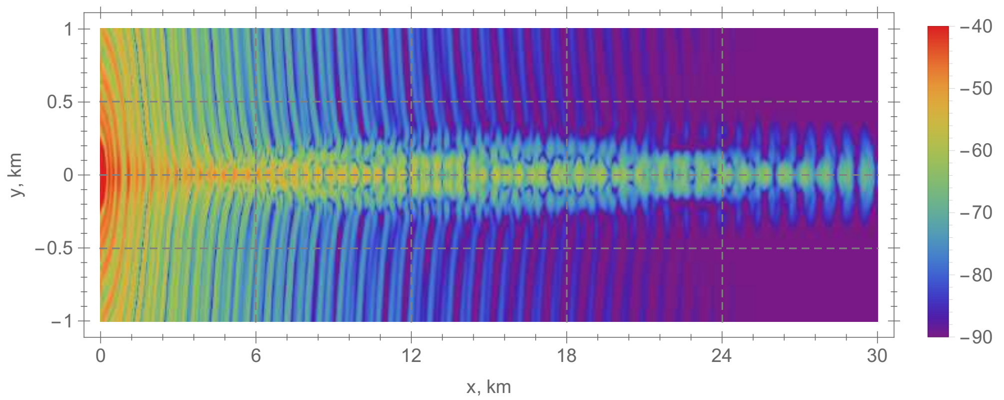
(a) Решение ШМПУ, $z = 10$ м



(b) SSP, $z = 10$ м



(c) Решение ШМПУ, $z = 55$ м



(d) SSP, $z = 55$ м

Рисунок 6 – Акустическое поле (в дБ отн. 1 м.) в клиновидном волноводе

3.2.3 Клиновидный волновод мелкого моря

Следующий вычислительный эксперимент был проведён для моделирования распространения звуковых волн в мелком море с подводным клином. Схематическое изображение этого волновода дано на Рисунке 7. Ре-

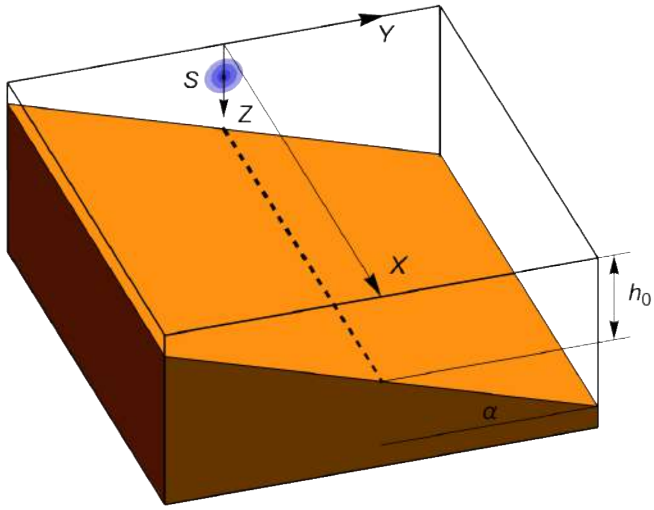


Рисунок 7 – Схематическое изображение подводного каньона

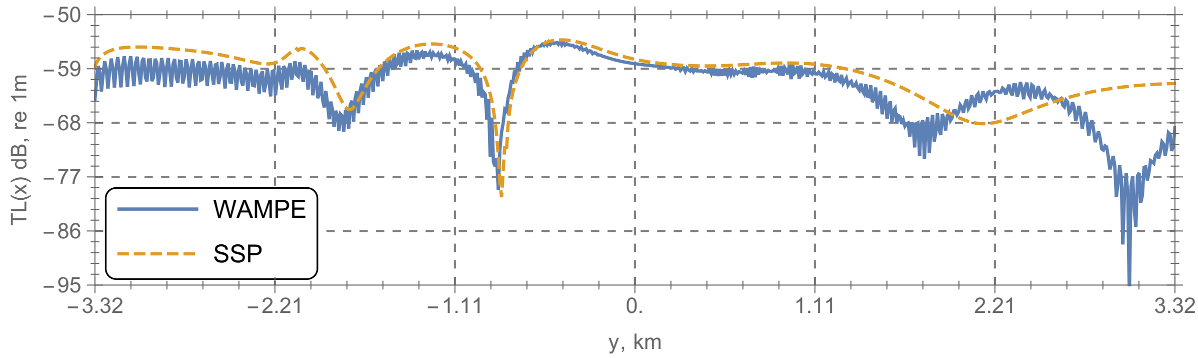
льеф дна задаётся функцией

$$z = h\,(y) = h_0 + y \tan\alpha\,. \tag{61}$$

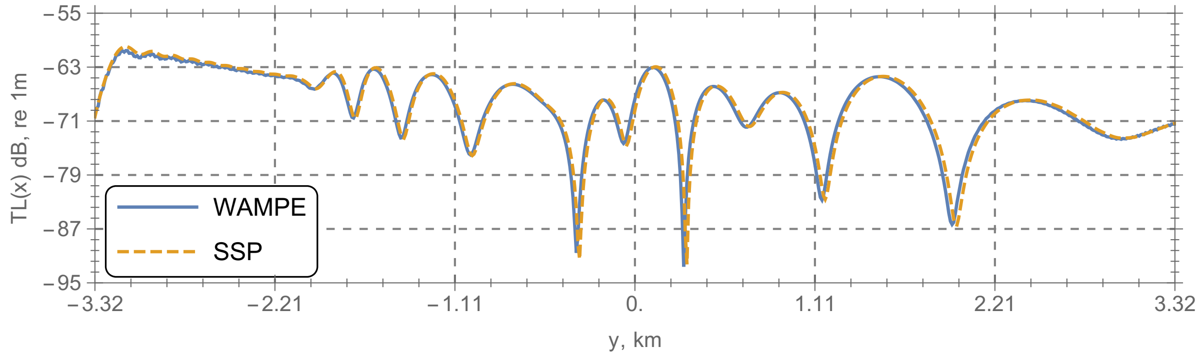
Точечный источник расположен достаточно далеко от вершины клина на глубине $z = z_s$. Акустическое поле было вычислено на глубине $z = 30$ м и были использованы следующие параметры

$$\begin{aligned}
z_s &= 100\ \text{м}\,, & h_0 &= 200\ \text{м}\,, & \alpha &\approx 2.86^\circ\,,\\
f &= 25\ \text{Гц}\,, & p &= 13\,, & a &= \pm 89.95^\circ\,,\\
x_0 &= 50\ \text{м}\,, & x_1 &= 25\ \text{км}\,, & n_x &= 50001\,,\\
y_0 &= -3.32\ \text{км}\,, & y_1 &= 3.32\ \text{км}\,, & n_y &= 13282\,.
\end{aligned} \tag{62}$$

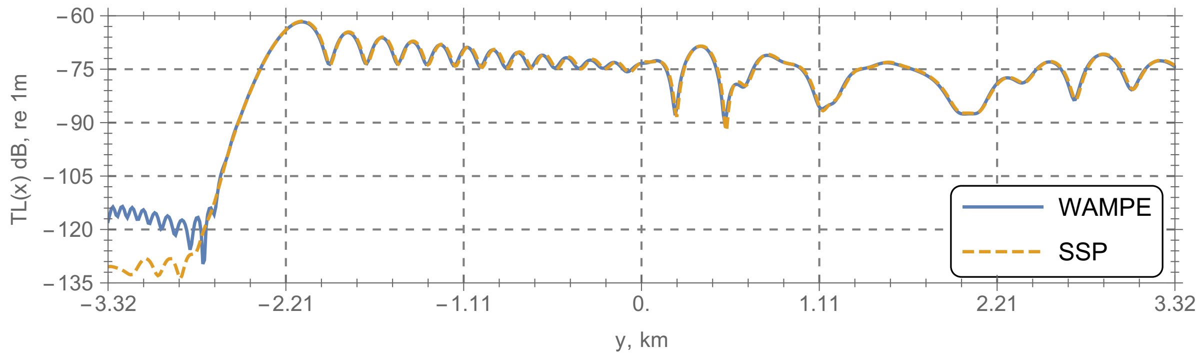
Результат вычислений показан на Рисунке 9, время работы программы составило 173.386 с. В целом решения ШМПУ и SSP похожи, однако даже на значительно расстоянии от источника заметна более широкая апертура SSP решения. Так как используемая модель не учитывает взаимодействия мод, звуковое поле обрезается, ввиду того, что при уменьшении глубины дна пропадают моды старших порядков. На Рисунке 8 показано сравнение решений при различных координатах x, из которого видно, что вблизи источника SSP решение не образует численного шума, а при отдалении от источника становится заметна более широкая апертура этого решения. Также было проведено сравнение с решением методом изображений [104, 105]. Сравнение результатов моделирования на Рисунке 10 показывает, что при малых углах скольжения относительно изобаты интерференционная картина решения в дальнем поле полностью определяется горизонтальной рефракцией звука, в то время как межмодовым взаимодействием можно пренебречь. Также, как показано на Рисунке 11, решения всех методов почти совпадают, не смотря на адиабатическую природу модовых параболических уравнений, при этом большая апертура SSP метода ещё сильнее приближает решение к решению методом изображений вдали от источника. Отсюда следует важный физический вывод о том, что при распространении звука в направлении вдоль изобат в мелком море (или под малыми углами скольжения горизонтальных лучей относительно изобат) допускается использование адиабатических моделей, таких как AMPLE. Данный эффект подтверждается и другими численными экспериментами, проведёнными в рамках данного диссертационного исследования, в т.ч. для случая широкополосных сигналов.



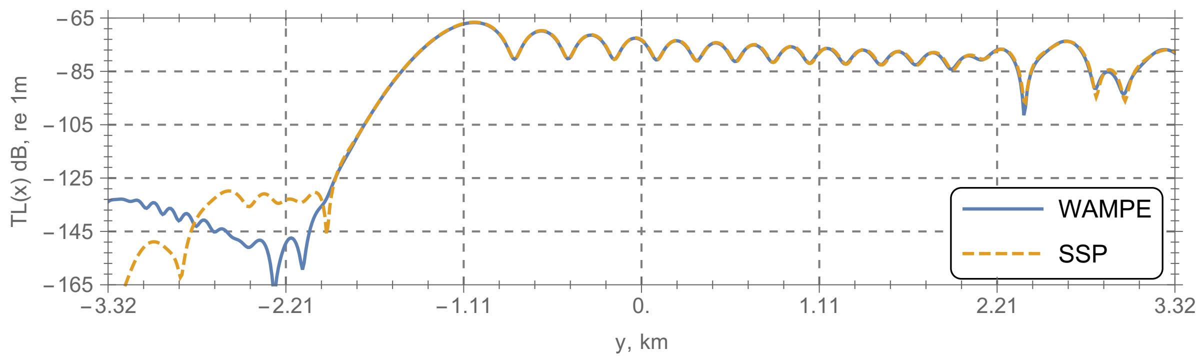
(a) $x_c = 1$ км.



(b) $x_c = 9$ км.

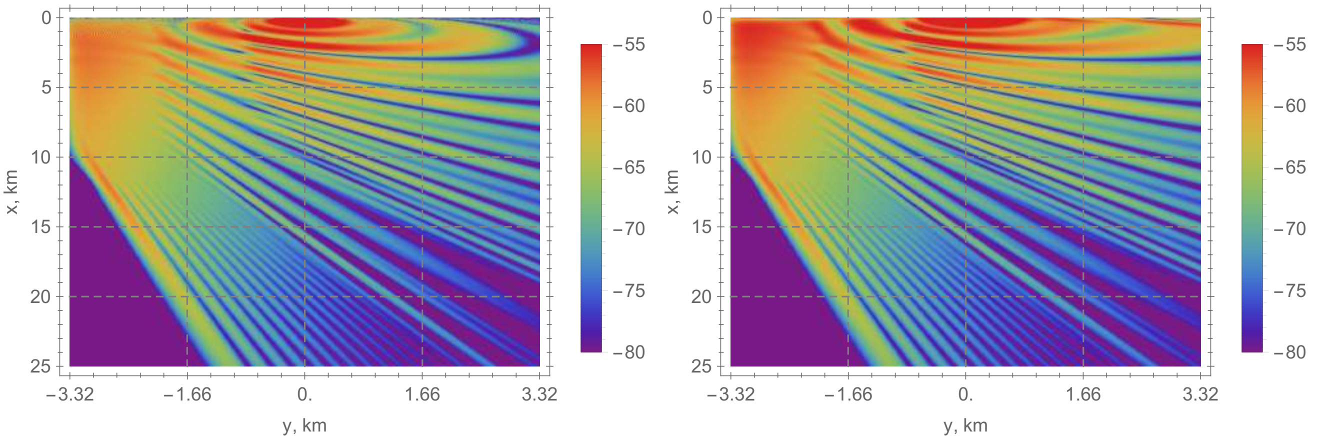


(c) $x_c = 17$ км.



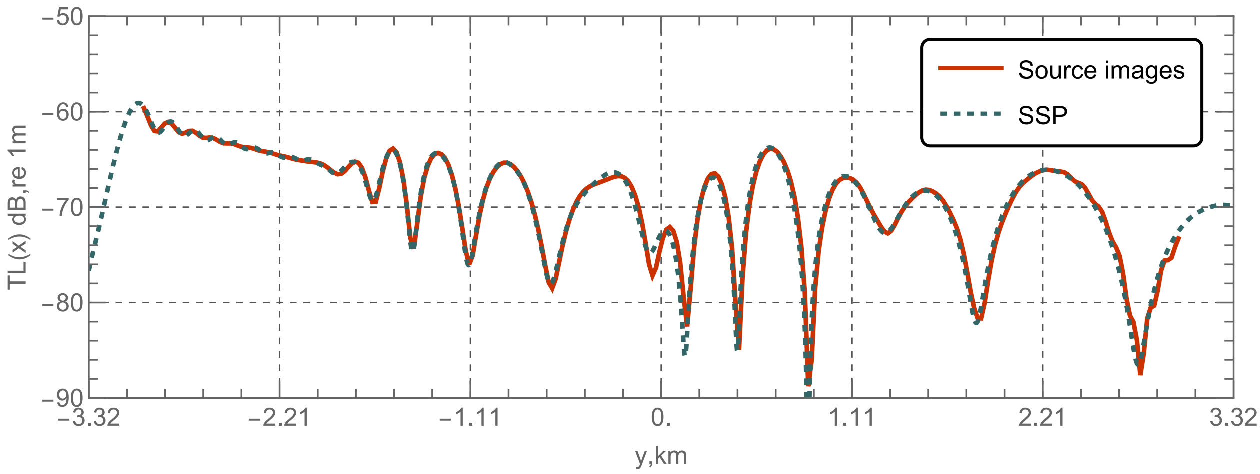
(d) $x_c = 25$ км.

Рисунок 8 – Сравнение результатов вычисления акустического поля с использованием метода широкоугольного параболического уравнения и метода SSP (AMPLE) (в дБ отн. 1 м.) в мелком море с подводным клином при $x = x_c$

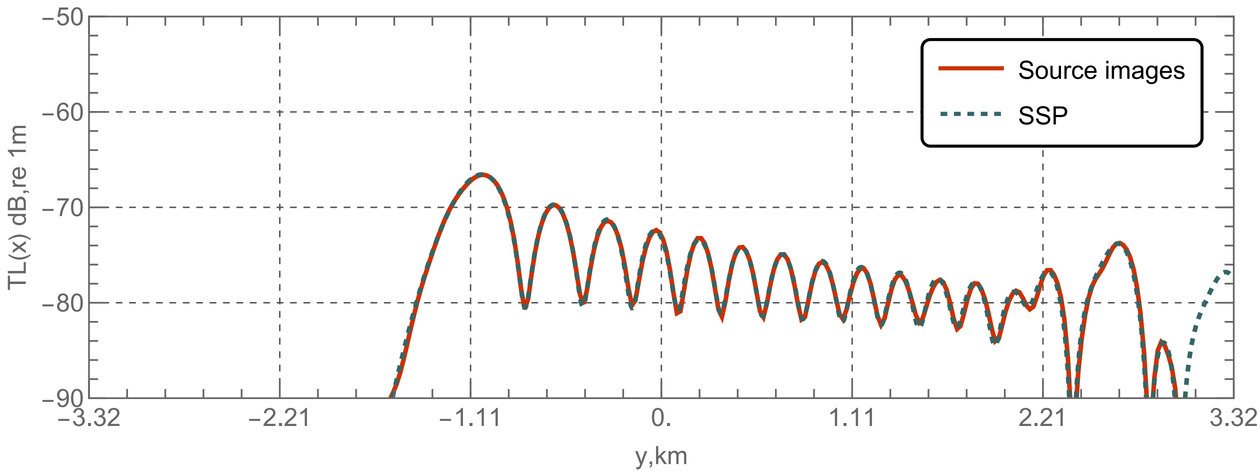


(a) Решение ШМПУ (b) SSP

Рисунок 9 – Акустическое поле (в дБ отн. 1 м.) в мелком море с подводным клином при $z = 30$ м.



(a) $x_c = 10$ км.



(b) $x_c = 25$ км.

Рисунок 10 – Сравнение результатов вычисления акустического поля с использованием метода мнимых источников и метода SSP (AMPLE) (в дБ отн. 1 м.) в мелком море с подводным клином при $x = x_c$ км.

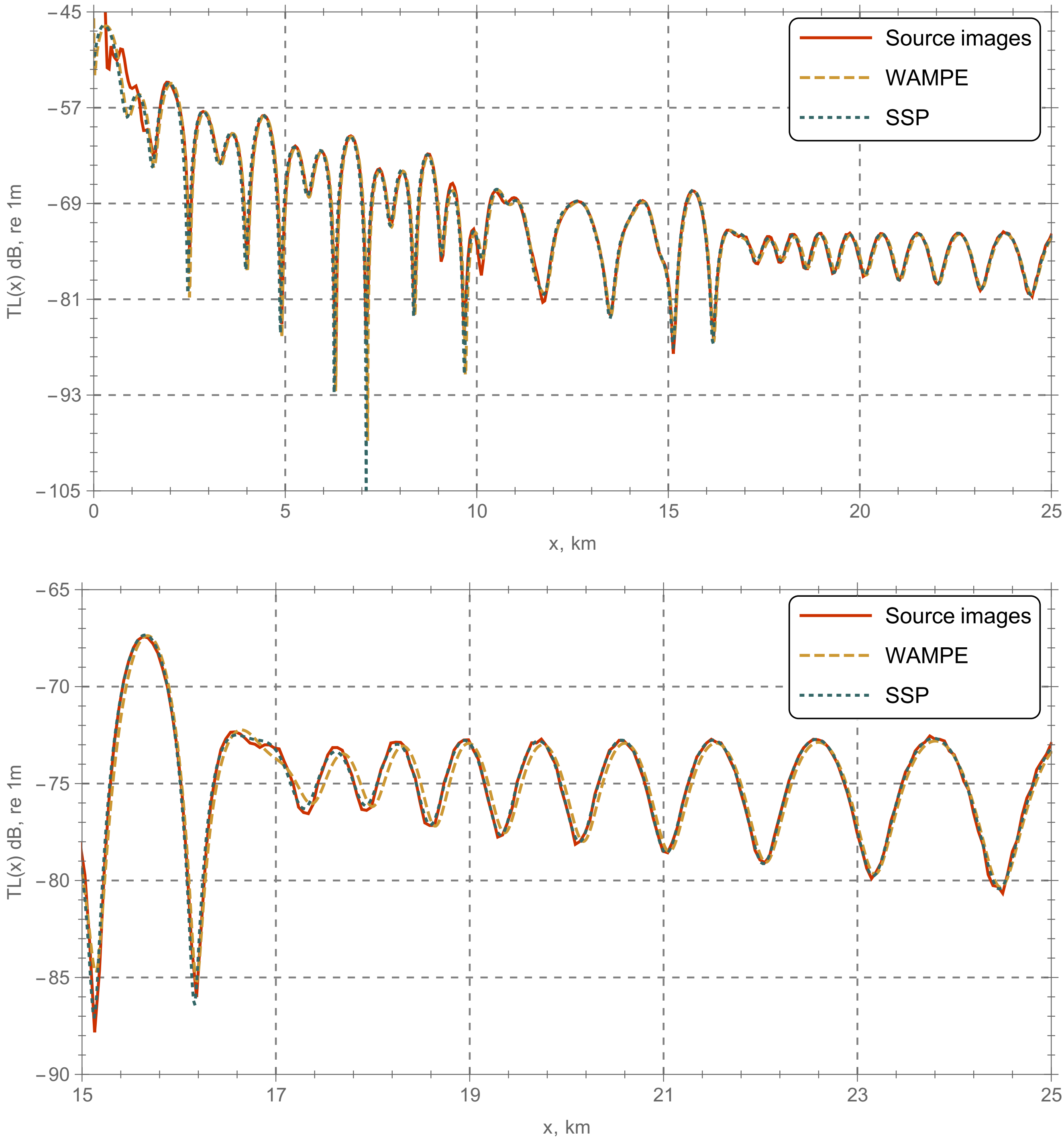


Рисунок 11 – Сравнение результатов вычисления акустического поля с использованием метода мнимых источников, метода широкоугольного параболического уравнения и метода SSP (AMPLE) (в дБ отн. 1 м.) в мелком море с подводным клином при $y = 0$ км.

3.2.3.1 Трассировка горизонтальных лучей

Рассмотрим задачу трассировки горизонтальных лучей в клиновидном волноводе (см. Главу 2.6.1). При распространении в среде, однородной по пространственной координате x, то есть при $k_j(x,y) \equiv k_j(y)$, справедлив закон Снеллиуса

$$k_j(y)\cos\left(\alpha_{j,\psi}(y)\right) = C\,, \tag{63}$$

где $\alpha_{j,\psi}(y)$ – угол скольжения луча относительно оси x, ψ – угол скольжения луча в источнике (см. Рис. 12), $C \in \mathbb{R}$ – некоторая константа. Тогда,

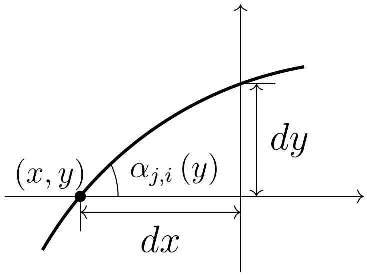


Рисунок 12 – Схематичное изображение распространения горизонтального луча.

положив $C = k_j(0)\cos(\psi)$, получим

$$\tan\left(\alpha_{j,\psi}(y)\right) = \frac{dy}{dx}\,, \tag{64}$$

$$1 + \tan^2\left(\alpha_{j,\psi}(y)\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\alpha_{j,\psi}(y)\right)}\,, \tag{65}$$

$$\frac{k_j(y)}{C^2} = \frac{1}{\cos^2\left(\alpha_{j,\psi}(y)\right)} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\,, \tag{66}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{k_j^2(y)}{k_j^2(0)\cos^2(\psi)} - 1}\,, \tag{67}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{k_j^2(y)}{k_j^2(0)\cos^2(\psi)} - 1}}\,. \tag{68}$$

Рассмотрим луч, исходящий из точки $x(0,\psi) = y(0,\psi) = 0$ и выпущенный под углом ψ, представим его в виде кривой $\{x(s,\psi), y(s,\psi)\}$ и получим представление координаты x в виде криволинейного интеграла второго рода вдоль кривой $l^{\psi}: y\left(s, \psi\right)$ (значения координаты y распространения луча)

$$x\left(S, \psi\right)=\int\limits_{l_S^{\psi}} \frac{\mathrm{d} y\left(s, \psi\right)}{\sqrt{\frac{k_j^2(y(s,\psi))}{k_j^2(0)\cos^2(\psi)}-1}}=\int\limits_0^S \frac{y_t'\left(s, \psi\right)\mathrm{d} s}{\sqrt{\frac{k_j^2(y(s,\psi))}{k_j^2(0)\cos^2(\psi)}-1}}. \qquad (69)$$

Сравнение результатов моделирования с использованием программы AMPLE и численного интегрирования (69) представлены на Рис. 13.

3.2.3.2 Моделирование векторного поля плотности потока энергии

Плотность потока энергии описывает скорость передачи энергии акустической волны через единицу площади перпендикулярно к направлению распространения волны и определяется как активная компонента вектора интенсивности [106]

$$\mathbf{I}\left(x, y, z\right)=\frac{1}{2}\left\langle\mathcal{R}\left(p\left(x, y, z, t\right)\overline{\mathbf{v}\left(x, y, z, t\right)}\right)\right\rangle, \qquad (70)$$

где $\langle\cdot\rangle$ обозначает усреднение по интервалу времени, кратному одному периоду, $\overline{(\cdot)}$ – оператор комплексного сопряжения, $p\left(x, y, z, t\right)$ – скалярное поле акустического давления во временной области, $\mathbf{v}\left(x, y, z, t\right)$ – векторное поле колебательного ускорения. При рассмотрении тональных сигналов векторное поле плотности потока энергии в частотной области для фиксированной частоты f может быть выражено как

$$\hat{\mathbf{I}}\left(x, y, z, \omega\right)=\frac{1}{2}\mathcal{R}\left(\hat{p}\left(x, y, z, \omega\right)\overline{\hat{\mathbf{v}}\left(x, y, z, \omega\right)}\right), \qquad (71)$$

где $\omega=2\pi f$ – циклическая частота. Вычисление колебательной скорости в частотной области описано в Главе 2.10.

Результаты моделирования векторного поля потока энергии отобра-

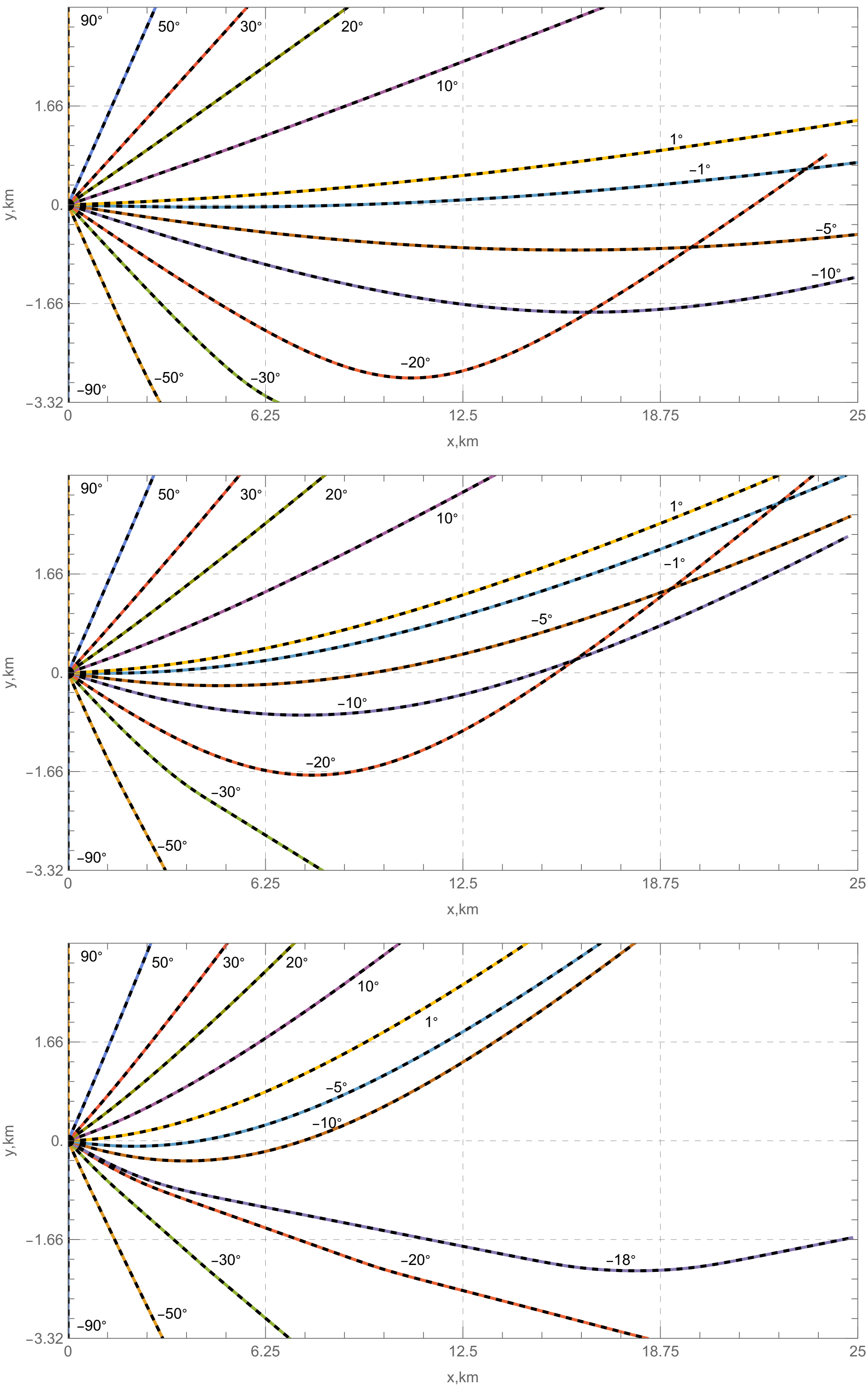


Рисунок 13 – Сравнение трассировки лучей путём численного решения системы (39) (сплошная кривая) и численного интегрирования (69) (пунктирная кривая) для трёх распространяющихся мод.

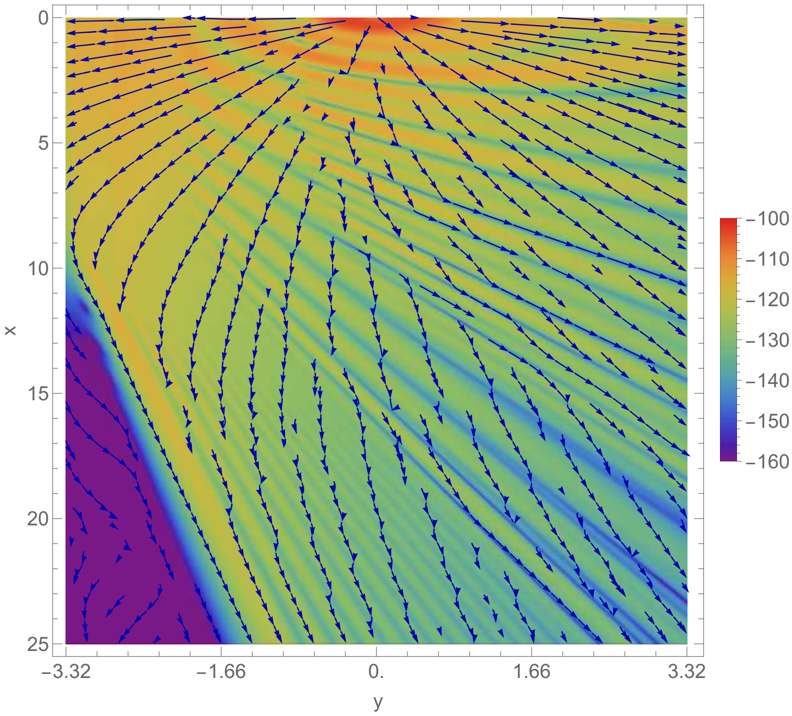


Рисунок 14 – Модуль и поток векторного поля плотности потока энергии на частоте 25 Гц в мелком море с подводным каньоном при $z = 30$ м.

жены на Рисунке 14. Как видно из рисунка при распространении звука в клиновидном волноводе звуковая энергия стремится в сторону увеличения глубины дна. При этом наблюдается относительно высокая скорость передачи энергии после отражения от мелководной части клина.

3.2.3.3 Моделирование распространения импульсных акустических сигналов

Рассмотрим задачу распространения импульсного акустического сигнала в клиновидном волноводе. Функция источника была выбрана следующим образом

$$f(t) = A\beta_n H_n^{(1)}\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right) e^{-\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2}, \tag{72}$$

где $A \in \mathbb{R}$ – параметр масштаба, t_0 – центральное время, σ – параметр ширины функции, $H_n^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода порядка n, а β_n

определено как

$$\beta_n = \begin{cases} \dfrac{k!}{n!}\,, & n = 2k\,, \\ \dfrac{k!\sqrt{4k+3}}{(2k)!\,(4k+2)}\,, & n = 2k+1\,. \end{cases} \tag{73}$$

Такой вид функции позволяет получить выражение для центральной частоты сигнала как

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sigma}\sqrt{2n+1}\,. \tag{74}$$

При моделировании были использованы следующие параметры функции источника

$$\begin{gathered} A = 2000\,, \quad t_0 = 0.3 \text{ с}\,, \\ \sigma = 0.021\,, \quad n = 21\,, \\ f_c = 50 \text{ Гц}\,. \end{gathered} \tag{75}$$

Графики функции и спектра источника отображены на Рисунке 15. При проведении моделирования был рассмотрен частотный диапазон $[13, 100]$, в модовом разложении были использованы 32 моды . Временной ряд импульса сигнала был вычислен в точке приёма, расположенной по координатам $x_r = 25000$ м , $y_r = 0$ м , $z_r = 30$ м. Сравнение результатов моделирования было проведено с решением методом изображений [104, 105]. Из результатов сравнения на Рисунке 16 видно, что решения показывают хорошую сходимость, при этом наибольшее отличие наблюдается в предвестнике, которое возникает из-за ограничений модового разложения при распространении на низких частотах на больших расстояниях.

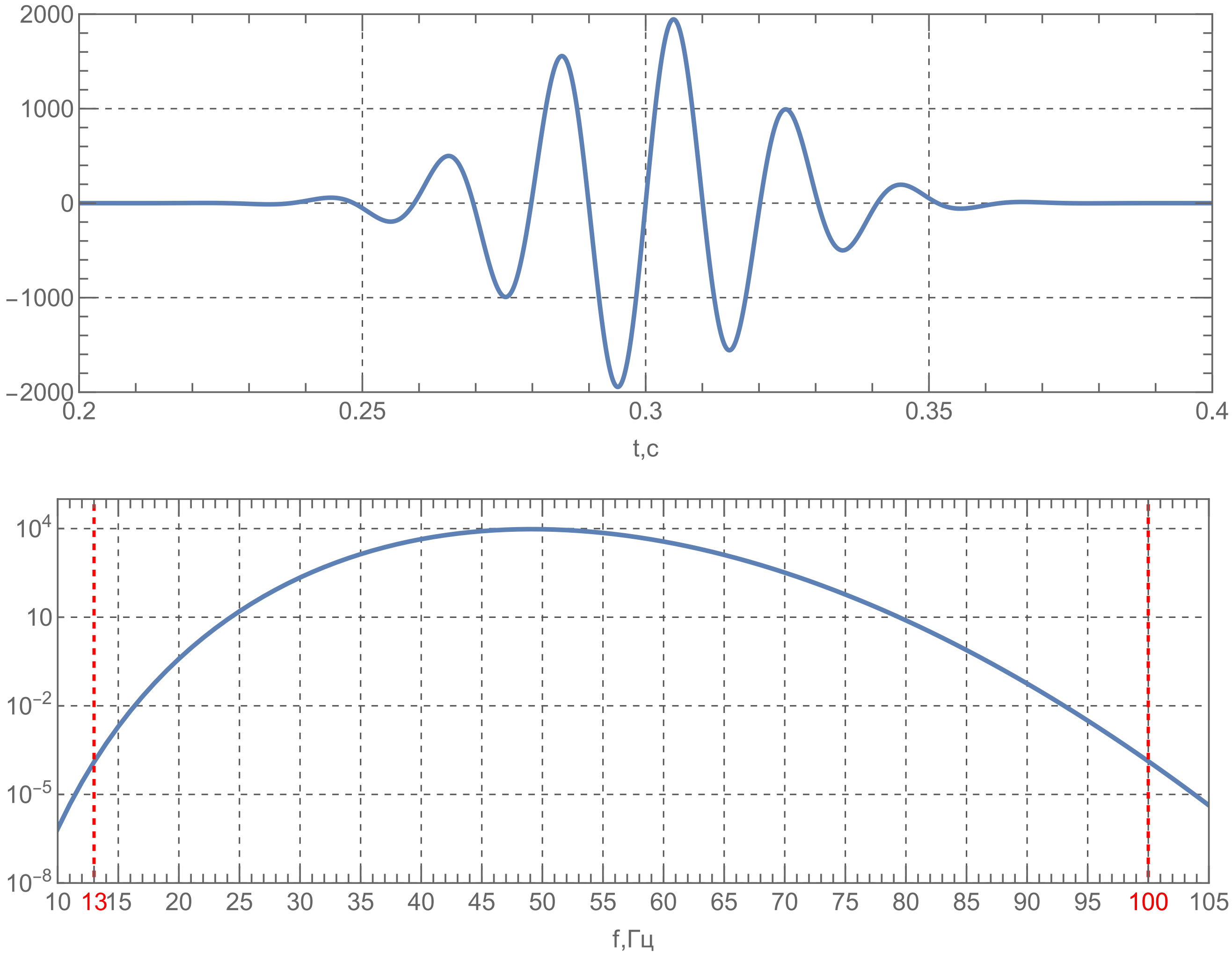


Рисунок 15 – Функция и спектр источника при моделировании распространения импульсных сигналов в клиновидном волноводе мелкого моря. Красной пунктирной линией отмечены границы рассматриваемых частот

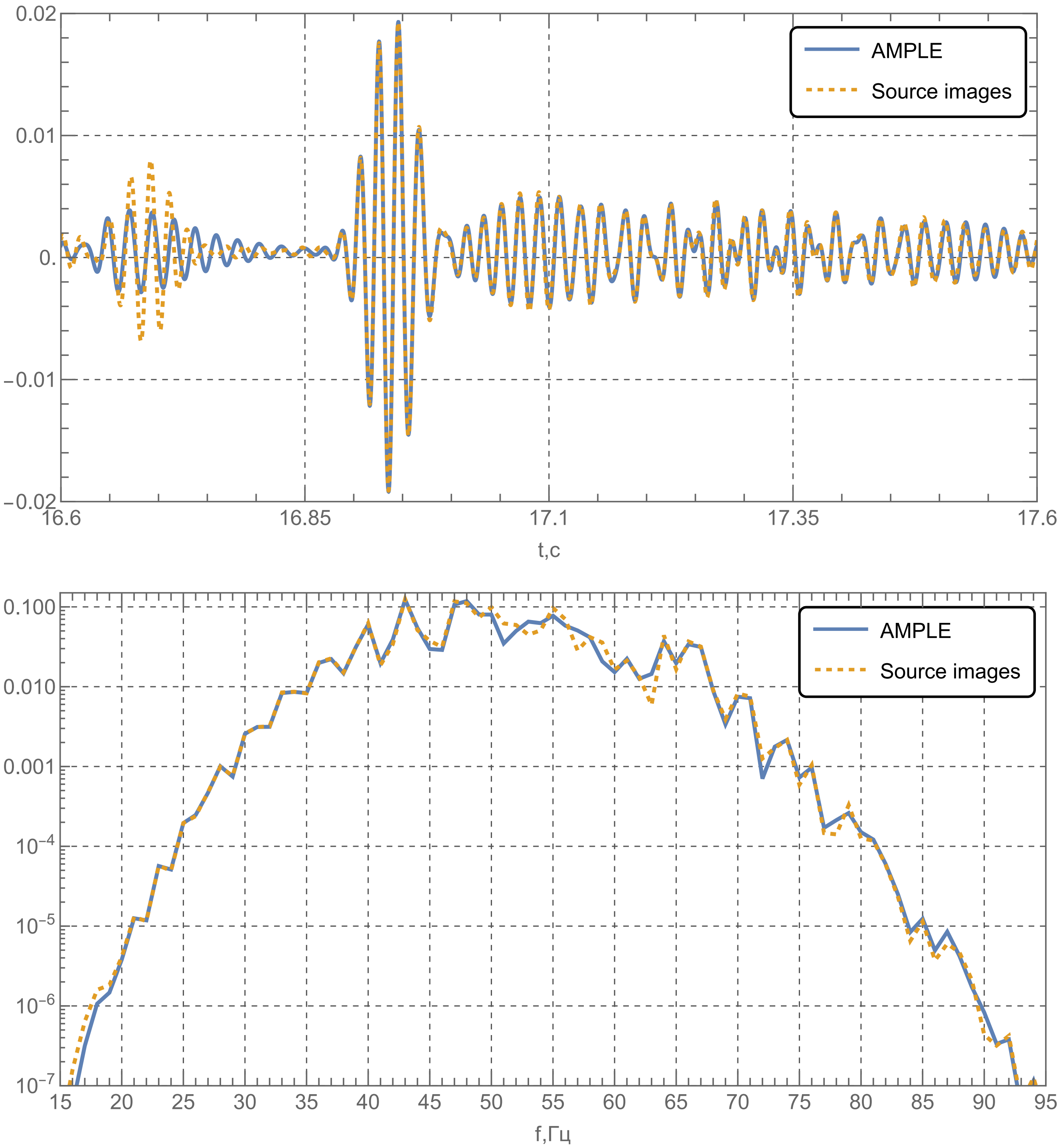


Рисунок 16 – Сравнение результатов вычисления временного ряда в приёмнике (сверху) и его спектра (снизу) при распространении импульсного акустического сигнала в клиновидном волноводе мелкого моря

3.2.4 Результаты вычислительных экспериментов

В результате вычислительных экспериментов было показано, что разработанная численная схема с применением аппроксимации Паде произвольного порядка и лучевых начальных условий работает корректно и может быть использована при моделировании распространения звука в сложных неоднородных океанических волноводах. При этом новый метод показывает значительно более гладкое и точное поле вблизи источника, а вдали от него учитывает волны исходящие под большими углами. Также в некоторых задачах более вычислительно затратные методы могут быть заменены разработанным методом, использование которого требует гораздо меньше вычислительных затрат.

Заключение

Таким образом, в рамках данной работы были получены следующие результаты

- Разработана и апробирована методика численного решения псевдодифференциальных модовых параболических уравнений с искусственным ограничением расчётной области путём постановки граничных условий прозрачности или добавления к ней согласованных поглощающих слоёв.

- Разработан комплекс программ на языке программирования C++, который может быть использован для моделирования распространения тональных и импульсных сигналов, а также вычисления скалярных и векторных акустических полей антропогенных шумов в океане с возможностью учёта батиметрических и гидрологических данных и структуры слоёв дна, и ориентированный на максимальную производительность.

Список литературы

1. Lee D., Schultz M. H. Numerical Ocean Acoustic Propagation in Three Dimensions. — WORLD SCIENTIFIC, 1995.

2. TOLSTOY A. 3-D PROPAGATION ISSUES AND MODELS // Journal of Computational Acoustics. — 1996. — Vol. 04, no. 03. — P. 243–271.

3. Smith K. B. A three-dimensional propagation algorithm using finite azimuthal aperture // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1999. — Dec. — Vol. 106, no. 6. — P. 3231–3239.

4. Sturm F., Fawcett J. A. On the use of higher-order azimuthal schemes in 3-D PE modeling // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2003. — Vol. 113, no. 6. — P. 3134–3145.

5. Heaney K. D., Campbell R. L. Three-dimensional parabolic equation modeling of mesoscale eddy deflection // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2016. — Feb. — Vol. 139, no. 2. — P. 918–926.

6. Experimental evidence of three-dimensional acoustic propagation caused by nonlinear internal waves / S. D. Frank, M. Badiey, J. F. Lynch, W. L. Siegmann // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2005. — Aug. — Vol. 118, no. 2. — P. 723–734.

7. Heaney K. D., Murray J. J. Measurements of three-dimensional propagation in a continental shelf environment // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2009. — Mar. — Vol. 125, no. 3. — P. 1394–1402.

8. Acoustic Ducting, Reflection, Refraction, and Dispersion by Curved Nonlinear Internal Waves in Shallow Water / J. Lynch, Y.-T. Lin, T. Duda, A. Newhall // Oceanic Engineering, IEEE Journal of. — 2010. — Feb. — Vol. 35. — P. 12–27.

9. Bradley D. L., Hudimac A. A. The Propagation of Sound in a Wedge-Shaped Shallow-Water Duct // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1971. — Jan. — Vol. 49, 1A_Supplement. — P. 97–97.

10. Buckingham M. J. Theory of three-dimensional acoustic propagation in a wedgelike ocean with a penetrable bottom // Journal of the Acoustical Society of America. — 1987. — Vol. 82. — P. 198–210.

11. Deane G. B., Buckingham M. J. An analysis of the three-dimensional sound field in a penetrable wedge with a stratified fluid or elastic basement // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1993. — Mar. — Vol. 93, no. 3. — P. 1319–1328.

12. Lee K., Seong W., Na Y. Three-dimensional Cartesian parabolic equation model with higher-order cross-terms using operator splitting, rational filtering, and split-step Padé algorithm // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Sept. — Vol. 146. — P. 2041–2049.

13. Lee K., Seong W., Na Y. Split-step Padé solver for three-dimensional Cartesian acoustic parabolic equation in stair-step representation of ocean environment // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 2050–2057.

14. Petrov P. N., Petrov P. S. Asymptotic solution for the problem of sound propagation in a shallow sea with the bathymetry described by a parametric quadratic function // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1946–1955.

15. Porter M. B. Beam tracing for two- and three-dimensional problems in ocean acoustics // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 2016–2029.

16. Sagers J. D., Ballard M. S. Scale model observations of coupled vertical modes in a translationally invariant wedge // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1867–1874.

17. Barclay D. R., Lin Y.-T. Three-dimensional ambient noise modeling in a submarine canyon // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1956–1967.

18. Parameter dependence of acoustic mode quantities in an idealized model for shallow-water nonlinear internal wave ducts / M. A. Milone, B. J. DeCourcy, Y.-T. Lin, W. L. Siegmann // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1934–1945.

19. Katsnelson B. G., Petrov P. S. Whispering gallery waves localized near circular isobaths in shallow water // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1968–1981.

20. DeCourcy B. J., Lin Y.-T., Siegmann W. L. Effects of front width on acoustic ducting by a continuous curved front over a sloping bottom // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1923–1933.

21. Reeder D. B., Lin Y.-T. 3D acoustic propagation through an estuarine salt wedge at low-to-mid-frequencies: Modeling and measurement // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1888–1902.

22. Sagers J. D., Lenhart R. D., Ballard M. S. Observation of out-of-plane ambient noise on two vector sensor moorings in Lake Travis // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1903–1912.

23. Ballard M. S., Sagers J. D. Measurements and modeling of acoustic propagation in a scale model canyon // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1858–1866.

24. Underwater acoustic energy fluctuations during strong internal wave activity using a three-dimensional parabolic equation model / G. A. Dossot, K. B. Smith, M. Badiey, J. H. Miller, G. R. Potty // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1875–1887.

25. Multiscale multiphysics data-informed modeling for three-dimensional ocean acoustic simulation and prediction / T. F. Duda, Y.-T. Lin, A. E. Newhall, K. R. Helfrich, J. F. Lynch, W. G. Zhang, P. F. J. Lermusiaux, J. Wilkin // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1996–2015.

26. Dall'Osto, R. D. Source triangulation utilizing three-dimensional arrivals: Application to the search for the ARA San Juan submarine // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 2104–2112.

27. Oliveira C. A., Tiago, Ying-Tsong L. Three-dimensional global scale underwater sound modeling: The T-phase wave propagation of a Southern Mid-Atlantic Ridge earthquake // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 2124–2135.

28. Three-dimensional bottom diffraction in the North Pacific / R. A. Stephen, S. T. Bolmer, P. F. Worcester, M. A. Dzieciuch, I. A. Udovydchenkov // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1913–1922.

29. Three-dimensional finite element simulation of acoustic propagation in spiral bubble net of humpback whale / X. Qing, P. R. White, T. G.

Leighton, S. Liu, G. Qiao, Y. Zhang // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1982–1995.

30. Three-dimensional modeling of earthquake generated acoustic waves in the ocean in simplified configurations / J. Lecoulant, C. Guennou, L. Guillon, J.-Y. Royer // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Sept. — Vol. 146. — P. 2113–2123.

31. Hardin R. H. Application of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations // Siam Review. — 1973. — Vol. 15. — P. 423.

32. Tappert F. D. Parabolic equation method in underwater acoustics // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1974. — Apr. — Vol. 55, S1. — S34–S34.

33. Ivansson S. Local accuracy of cross-term corrections of three-dimensional parabolic-equation models // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 2030–2040.

34. Lin Y.-T. Three-dimensional boundary fitted parabolic-equation model of underwater sound propagation // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 2058–2067.

35. An explicit marching-on-in-time scheme for solving the time domain Kirchhoff integral equation / R. Chen, S. B. Sayed, N. Alharthi, D. Keyes, H. Bagci // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 2068–2079.

36. Fahnline J. B. Efficient, wide-band rigid-body and elastic scattering computations using transient equivalent sources // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 2080–2092.

37. Calazan R., Rodríguez O. TRACEO3D Ray Tracing Model for Underwater Noise Predictions //. — 03/2017. — P. 183–190.

38. Porter M. The KRAKEN normal mode program //. — 1992.

39. Duda T. F. Initial results from a Cartesian three-dimensional parabolic equation acoustical propagation code. — 2006.

40. The Effects of Ship Noise on Marine Mammals—A Review / C. Erbe, S. A. Marley, R. P. Schoeman, J. N. Smith, L. E. Trigg, C. B. Embling // Frontiers in Marine Science. — 2019. — Vol. 6. — P. 606.

41. Impacts of anthropogenic noise on marine life: Publication patterns, new discoveries, and future directions in research and management / R. Williams, A. J. Wright, E. Ashe, L. K. Blight, R. Bruintjes, R. Canessa, C. Clark, S. Cullis-Suzuki, D. T. Dakin, C. Erbe, P. S. Hammond, N. D. Merchant, P. D. O'Hara, J. Purser, A. N. Radford, S. D. Simpson, L. Thomas, M. A. Wale // Ocean & Coastal Management. — 2015. — Vol. 115. — P. 17–24.

42. Calibrating and monitoring the western gray whale mitigation zone and estimating acoustic transmission during a 3D seismic survey, Sakhalin Island, Russia / A. Rutenko, S. Borisov, A. Gritsenko, M. Jenkerson // Environmental monitoring and assessment. — 2007. — Vol. 134, no. 1. — P. 21–44.

43. Responsible practices for minimizing and monitoring environmental impacts of marine seismic surveys with an emphasis on marine mammals / D. P. Nowacek, K. Bröker, G. Donovan, G. Gailey, R. Racca, R. R. Reeves, A. I. Vedenev, D. W. Weller, B. L. Southall // Aquatic Mammals. — 2013. — Vol. 39, no. 4. — P. 356.

44. Monitoring the acoustic field of seismic survey pulses in the near-coastal zone / A. Rutenko, D. Borovoi, V. Gritsenko, P. Petrov, V. Ushchipovskii, M. Boekholt // Acoustical Physics. — 2012. — Vol. 58, no. 3. — P. 326–338.

45. Bailey H., Brookes K. L., Thompson P. M. Assessing environmental impacts of offshore wind farms: lessons learned and recommendations for the future // Aquatic biosystems. — 2014. — Vol. 10, no. 1. — P. 1–13.

46. Monitoring the gray whale sound exposure mitigation zone and estimating acoustic transmission during a 4-D seismic survey, Sakhalin Island, Russia / R. Racca, M. Austin, A. Rutenko, K. Bröker // Endangered Species Research. — 2015. — Vol. 29, no. 2. — P. 131–146.

47. Lucke K., Martin S. B., Racca R. Evaluating the predictive strength of underwater noise exposure criteria for marine mammals // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2020. — Vol. 147, no. 6. — P. 3985.

48. Bröker K. C. Monitoring and mitigation of the sound effects of hydrocarbon exploration activities on marine mammal populations : PhD thesis / Bröker Koen C.A. — University of Groningen, 09/2021.

49. A Method for Estimating the Characteristics of Acoustic Pulses Recorded on the Sakhalin Shelf for Multivariate Analysis of their Effect on the Behavior of Gray Whales / A. Rutenko, V. Gritsenko, D. Kovzel, D. Manulchev, M. Y. Fershalov // Acoustical Physics. — 2019. — Vol. 65, no. 5. — P. 556–566.

50. Lin Y.-T., Duda T. F., Newhall A. E. Three-dimensional sound propagation models using the parabolic-equation approximation and the split-step Fourier method // Journal of Computational Acoustics. — 2013. — Vol. 21, no. 01. — P. 1250018.

51. Исследование возможности позиционирования автономных подводных аппаратов при выполнении ими глубоководных миссий / Ю. Н. Моргунов, С. И. Каменев, В. В. Безответных, П. С. Петров // Подводные исследования и робототехника. — 2019.

52. Эксперементальное и теоретическое исследование времен прихода и эффективных скоростей при дальнем распространении импульсных акустических сигналов вдоль кромки шельфа в мелком море / П. С. Петров, А. А. Голов, В. В. Безответных, А. В. Буренин, С. Б. Козицкий, М. А. Сорокин, Ю. Н. Моргунов // Акустический журнал. — 2020. — Т. 66, № 1. — С. 20—33.

53. Proposed alignment of measurement and analysis procedures for quiet ship certifications : tech. rep. / M. Ainslie, D. Hannay, A. MacGillivray, K. Trounce, K. Lucke ; Technical memorandum, Document. — 2021.

54. Source spectrum model for merchant ship radiated noise in the Yellow Sea of China / P. Jiang, J. Lin, J. Sun, X. Yi, Y. Shan // Ocean Engineering. — 2020. — Vol. 216. — P. 107607.

55. MacGillivray A., Jong C. de. A reference spectrum model for estimating source levels of marine shipping based on Automated Identification System data // Journal of Marine Science and Engineering. — 2021. — Vol. 9, no. 4. — P. 369.

56. Wales S. C., Heitmeyer R. M. An ensemble source spectra model for merchant ship-radiated noise // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2002. — Vol. 111, no. 3. — P. 1211–1231.

57. Averaging underwater noise levels for environmental assessment of shipping / N. D. Merchant, P. Blondel, D. T. Dakin, J. Dorocicz // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2012. — Vol. 132, no. 4. — EL343–EL349.

58. Analysis and modeling of 255 source levels of merchant ships from an acoustic observatory along St. Lawrence Seaway / Y. Simard, N. Roy, C. Gervaise, S. Giard // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2016. — Vol. 140, no. 3. — P. 2002–2018.

59. Underwater Noise from Large Commercial Ships – International Collaboration for Noise Reduction / B. L. Southall, A. R. Scholik-Schlomer, L. Hatch, T. Bergmann, M. Jasny, K. Metcalf, L. Weilgart, A. J. Wright // Encyclopedia of Maritime and Offshore Engineering. — John Wiley, Sons, Ltd, 2017. — P. 1–9.

60. Marine mammal noise exposure criteria: Updated scientific recommendations for residual hearing effects / B. L. Southall, J. J. Finneran, C. Reichmuth, P. E. Nachtigall, D. R. Ketten, A. E. Bowles, W. T. Ellison, D. P. Nowacek, P. L. Tyack // Aquatic Mammals. — 2019. — Vol. 45, no. 2. — P. 125–232.

61. The Effects of Ship Noise on Marine Mammals – A Review / C. Erbe, S. A. Marley, R. P. Schoeman, J. N. Smith, L. E. Trigg, C. B. Embling // Frontiers in Marine Science. — 2019. — Vol. 6.

62. Passive geoacoustic inversion with a single hydrophone using broadband ship noise / C. Gervaise, B. G. Kinda, J. Bonnel, Y. Stéphan, S. Vallez // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2012. — Vol. 131, no. 3. — P. 1999–2010.

63. Knobles D. P. Maximum entropy inference of seabed attenuation parameters using ship radiated broadband noise // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2015. — Vol. 138, no. 6. — P. 3563–3575.

64. Probabilistic estimation of merchant ship source levels in an uncertain shallow-water environment / D. Tollefsen, W. S. Hodgkiss, S. E. Dosso,

J. Bonnel, D. P. Knobles // IEEE Journal of Oceanic Engineering. — 2021. — Vol. 47, no. 3. — P. 647–656.

65. Sturm F. Leading-order cross term correction of three-dimensional parabolic equation models // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2016. — Vol. 139, no. 1. — P. 263–270.

66. Özkan Sertlek H., Ainslie M. A. A depth-dependent formula for shallow water propagation // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2014. — Vol. 136, no. 2. — P. 573–582.

67. Sertlek H. Ö., Ainslie M. A., Heaney K. D. Analytical and numerical propagation loss predictions for gradually range-dependent isospeed waveguides // IEEE Journal of Oceanic Engineering. — 2018. — Vol. 44, no. 4. — P. 1240–1252.

68. Wide-angle mode parabolic equations for the modelling of horizontal refraction in underwater acoustics and their numerical solution on unbounded domains / P. S. Petrov, M. Ehrhardt, A. G. Tyshchenko, P. N. Petrov // Journal of Sound and Vibration. — 2020. — Vol. 484. — P. 115526.

69. Petrov P. S., Ehrhardt M., Kozitskiy S. B. A generalization of the split-step Padé method to the case of coupled acoustic modes equation in a 3D waveguide // Journal of Sound and Vibration. — 2024. — Vol. 577. — art. no. 118304.

70. The BELLHOP Manual and User's Guide [Electronic Resource]. — URL: http://oalib.hlsresearch.com/Rays/HLS-2010-1.pdf (visited on 07/23/2024).

71. Calazan R. M., Rodríguez O. C. TRACEO3D Ray Tracing Model for Underwater Noise Predictions // Technological Innovation for Smart Systems. — Springer International Publishing, 2017. — P. 183–190.

72. Isakson M. J., Goldsberry B., Chotiros N. P. A three-dimensional longitudinally-invariant finite element model for acoustic propagation in shallow water waveguides // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2014. — Vol. 136, no. 3. — EL206.

73. Lin Y.-T., Collis J. M., Duda T. F. A three-dimensional parabolic equation model of sound propagation using higher-order operator splitting and Padé approximants // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2012. — Vol. 125, no. 5. — EL364.

74. Petrov P. S., Zaikin O., Tyshchenko A. G. Cambala [Электронный ресурс]. — URL: https://github.com/Nauchnik/CAMBALA (дата обращения: 23.07.2024).

75. Computational Ocean Acoustics / F. A. Jensen, W. Kuperman, M. Porter, H. Schmidt. — 2nd ed. — New York : Springer, 2011.

76. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type // P. Adv Comput Math. — 1996. — Vol. 6, no. 1. — P. 207–226.

77. Авилов К. В. Псевдодифференциальные параболические уравнения рас пространения звука в океане, плавно неоднородном по горизонтали, и их численное решени // Акустический журнал. — 1995. — Т. 41, № 1. — С. 5—12.

78. Collins M. D. A split-step Padé solution for the parabolic equation method // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1993. — Vol. 93, no. 4. — P. 1736–1742.

79. Абрамов А. А., Андреев В. Б. О применении метода прогонки к нахождению периодических решенений дифференциальных и разностных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1963. — Vol. 3, no. 2. — P. 377–381.

80. Berenger J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // Journal of Computational Physics. — 1994. — Vol. 114, no. 2. — P. 185–200.

81. Levy M. F. Perfectly Matched Layer Truncation for Parabolic Wave Equation Models // Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2001. — Vol. 457, no. 2015. — P. 2609–2624.

82. Lu Y. Y., Zhu J. Perfectly matched layer for acoustic waveguide modeling — benchmark calculations and perturbation analysis // Computer Modeling in Engineering & Sciences. — 2007. — Vol. 22, no. 3. — P. 235–248.

83. Burridge R., Weinberg H. Horizontal rays and vertical modes // Wave Propagation and Underwater Acoustics. — 1977. — P. 86–152.

84. Davis P. J., Rabinowitz P. Chapter 2 - Approximate Integration over a Finite Interval // Methods of Numerical Integration (Second Edition) / ed. by P. J. Davis, P. Rabinowitz. — 2nd ed. — Academic Press, 1984. — P. 51–198.

85. C++ Standard [Электронный ресурс]. — URL: https://isocpp.org/ (дата обращения: 23.07.2024).

86. Boost [Электронный ресурс]. — URL: https://www.boost.org/ (дата обращения: 23.07.2024).

87. nlohmann/json [Электронный ресурс]. — URL: https://github.com/nlohmann/json (дата обращения: 23.07.2024).

88. FFTW [Электронный ресурс]. — URL: http://www.fftw.org/ (дата обращения: 23.07.2024).

89. Frigo M., Johnson S. G. The Design and Implementation of FFTW3 // Proceedings of the IEEE. — 2005. — Vol. 93, no. 2. — P. 216–231.

90. JSON [Электронный ресурс]. — URL: http://www.json.org/json-ru.html (дата обращения: 23.07.2024).

91. Тыщенко А. Г. DORK [Электронный ресурс]. — URL: https://github.com/GoldFeniks/DORK (дата обращения: 23.07.2024).

92. Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I. Vol. 8. — 2nd ed. — Springer, 1993. — (Springer Series in Computational Mathematics).

93. Тыщенко А. Г. delaunay [Электронный ресурс]. — URL: https://github.com/GoldFeniks/delaunay (дата обращения: 23.07.2024).

94. Sinclair D. S-hull [Электронный ресурс]. — URL: http://www.s-hull.org/ (дата обращения: 23.07.2024).

95. Тыщенко А. Г. zip [Электронный ресурс]. — URL: https://github.com/GoldFeniks/zip (дата обращения: 23.07.2024).

96. Eigen v3 [Электронный ресурс] / G. Guennebaud, B. Jacob [и др.]. — 2010. — URL: http://eigen.tuxfamily.org (дата обращения: 23.07.2024).

97. Meijering E. A Chronology of Interpolation: From Ancient Astronomy to Modern Signal and Image Processing // Proceedings of the IEEE. — 2002. — Vol. 90, no. 3. — P. 319–342.

98. Yehong L., Guosheng Y. Nonparametric Functional Approximation with Delaunay Triangulation [Электронный ресурс]. — URL: https://arxiv.org/pdf/1906.00350.pdf (дата обращения: 23.07.2024).

99. Optional [Электронный ресурс]. — URL: https://en.cppreference.com/w/cpp/utility/optional (дата обращения: 23.07.2024).

100. IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic // ANSI/IEEE Std 754-1985. — 1985. — P. 1–20.

101. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — 4-е изд. — Издательство "Лань", 2021.

102. Hankel Function of the First Kind [Электронный ресурс]. — URL: http://mathworld.wolfram.com/HankelFunctionoftheFirstKind.html (дата обращения: 23.07.2024).

103. Тыщенко А. Г. Решение широкоугольного параболического уравнения с условиями прозрачной границы при моделировании распространения звука в трёхмерных волноводах мелкого моря : Выпускная квалификационная работа / Тыщенко А. Г. — Дальневосточный Федеральный Университет, 2019.

104. Deane G. B., Buckingham M. J. An analysis of the three-dimensional sound field in a penetrable wedge with a stratified fluid or elastic basement // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1993. — Vol. 93, no. 3. — P. 1319–1328.

105. On the Method of Source Images for the Wedge Problem Solution in Ocean Acoustics: Some Corrections and Appendices / J. Tang, P. Petrov, S. Piao, S. Kozitskiy // Acoustical Physics. — 2018. — Mar. — Vol. 64. — P. 225–236.

106. Щуров В. Векторная акустика океана. — Федеральное государственное унитарное предприятие Издательство Дальнаука, 2003.

Приложение A

Примеры конфигурационного файла

```json
{
    "ppm": 10,
    "y0": -4000,
    "y1": 4000,
    "ny": 8001,
    "x0": 50,
    "x1": 10000,
    "nx": 10001,
    "z0": 30,
    "z1": 30,
    "nz": 1,
    "mny": 2,
    "z_s": 100,
    "init": "ray_simple",
    "a0": -1.57,
    "a1":  1.57,
    "coefficients": {
        "type": "ssp",
        "parameters": { "n": 17 }
    },
    "input_data": [
        {
            "type": "frequencies",
            "dimensions": [ 1 ],
            "values": [ 25 ]
        },
        {
            "type": "bathymetry",
            "dimensions": [ 2, 2 ],
            "values": [
                [200, 200],
                [200, 200]
            ]
        },
        {
            "type": "hydrology",
            "dimensions": [ 2, 2 ],
            "values": [
                [1500, 1500],
                [1500, 1500]
            ]
        }
    ]
}
```

```
{
    "ppm": 10,
    "y0": -3320,
    "y1": 3320,
    "ny": 6641,
    "x0": 50,
    "x1": 25000,
    "nx": 25001,
    "z0": 30,
    "z1": 30,
    "nz": 1,
    "mny": 1661,
    "z_s": 100,
    "init": "ray_simple",
    "a0": -1.57,
    "a1":  1.57,
    "coefficients": {
        "type": "ssp",
        "parameters": { "n": 13 }
    },
    "input_data": [
        {
            "type": "frequencies",
            "dimensions": [ 1 ],
            "values": [ 25 ]
        },
        {
            "type": "bathymetry",
            "dimensions": [
                2,
                {
                    "n": 2,
                    "bounds": { "a": -4000, "b":  4000 }
                }
            ],
            "values": [
                [0, 400],
                [0, 400]
            ]
        },
        {
            "type": "hydrology",
            "dimensions": [ 2, 2 ],
            "values": [
                [1500, 1500],
                [1500, 1500]
            ]
        }
    ]
}
```

```json
{
    "ppm": 10,
    "y0": -3000,
    "y1": 3000,
    "ny": 6001,
    "x0": 50,
    "x1": 10000,
    "nx": 10001,
    "z0": 10,
    "z1": 10,
    "nz": 1,
    "z_s": 10,
    "bottom_rhos": [2],
    "bottom_c1s": [1800],
    "bottom_c2s": [1800],
    "init": "ray_simple",
    "a0": -1.5,
    "a1":  1.5,
    "coefficients": {
        "type": "ssp",
        "parameters": { "n": 11 }
    },
    "input_data": [
        {
            "type": "frequencies",
            "dimensions": [ 1 ],
            "values": [ 150 ]
        },
        {
            "type": "bathymetry",
            "dimensions": [
                2,
                {
                    "n": 1001,
                    "bounds": { "a": -3000, "b":  3000 }
                }
            ],
            "values": "bathymetry.txt"
        },
        {
            "type": "hydrology",
            "dimensions": [ 2, 2 ],
            "values": [
                [1500, 1500],
                [1500, 1500]
            ]
        }
    ]
}
```