

**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева  
Дальневосточного отделения Российской академии наук**

На правах рукописи

**Тыщенко Андрей Геннадьевич**

**Численное моделирование распространения широкополосных  
акустических сигналов в мелком море с использованием модовых  
параболических уравнений**

Научный доклад

об основных результатах подготовленной  
научно-квалификационной работы (диссертации)

Направление подготовки: 03.06.01 Физика и астрономия

Профиль: 01.04.02 «Теоретическая физика»

Научный руководитель

д.ф.-м.н.

Петров Павел Сергеевич

Владивосток – 2025

# Введение

## **Актуальность темы исследования.**

В настоящее время в акустике океана активно развиваются методы математического моделирования распространения звука в трёхмерных неоднородных волноводах и разрабатываются комплексы программ, основанные на данных методах.

Математическое описание таких эффектов как отражение, преломление, диффракция и рассеяние акустической энергии в трёхмерном пространстве, то есть одновременно в вертикальной и горизонтальной плоскостях, рассматриваются в литературе на протяжении нескольких десятилетий. Обзоры наиболее ранних работ представлены, например, в книге [1] и статье [2]. В дальнейшем были разработаны первые эффективные и достаточно точные методы численного моделирования распространения звука, например, основанные на трёхмерных параболических уравнениях. Необходимость учитывать трёхмерные эффекты также была экспериментально подтверждена в ряде работ 1990-2005 гг. [1, 2].

Немаловажно также отметить работы, в которых исследование посвящено трёхмерным эффектам, возникающим в реальных волноводах, таких как различного рода явления, возникающие из-за соляных клинов в устьях рек и нелинейных внутренних волн в областях континентального шельфа, и влиянию батиметрии на трёхмерную фокусировку, расфокусировку и дифракцию акустических волн.

Большое внимание в литературе уделяется исследованию точности и применимости различных современных методов моделирования распространения и рассеяния звука в трёхмерных океанических волноводах. Например, методы конечных элементов были рассмотрены в работе [3], где они были применены для моделирования акустического давления в пузырьковых сетях, создаваемого вокализациями горбатых китов. Другая группа численных ме-

тодов, основанных на методе параболического уравнения и впервые представленных в подводной акустике в 1973 году, в дальнейшем была развита в работе [4], в которой особое внимание уделено перекрёстным членам, содержащим производные по глубине и угловой координате и возникающим из квадратного корня при формальной факторизации уравнения Гельмгольца. Лучевая теория распространения звука была также применена для расчёта трёхмерных звуковых полей и была протестирована в ходе моделирования натуральных экспериментов в Восточно-Китайском море в работе [5]. Улучшению качества моделирования распространения звука в задачах с реальными внутренними волнами посвящена работа [6], в рамках которой был разработан комбинированный метод моделирования, включающий нелинейную модель внутренних волн в региональную модель, основанную на реальных данных и учитывающую приливы и отливы. Также, в недавних работах внимание уделяется моделированию рассеяния, например, с использованием методов, основанных на явной численной схеме для решения интегрального уравнения Кирхгофа во временной области, методе кратковременных эквивалентных источников для задач широкополосного рассеяния, численном методе расчёта функции Грина для моделирования рассеяния на больших расстояниях, возникающего из-за объектов, расположенных на морском дне или погружённых в нём.

Некоторые методы, описанные в литературе, также имеют открытую программную реализацию. Так, например, программы BELLHOP3D [5] и TRACEO3D [7] реализуют метод моделирования распространения звука, основанный на трассировке лучей и гауссовых пучков. В KRAKEN3D [8] реализовано вычисление акустических полей в рамках модового разложения. Также, моделирование путём решения трёхмерных параболических уравнений реализовано в CAPRE3D [9].

Настоящая научно-квалификационная работа посвящена широкоугольным модовым параболическим уравнениям, которые известны уже достаточно давно, однако до сих пор не получили широкого распространения. Несмотря

на это, использование таких уравнений представляется перспективным, так как в сравнении с узкоугольными параболическими уравнениями они позволяют получать более точные решения, при этом требуя лишь незначительного увеличения объёма вычислений. Так, самым трудоёмким этапом является решение акустической спектральной задачи, которое может быть выполнено заранее для изучаемой области, что значительно ускоряет процесс моделирования, так как само решение уравнения занимает существенно меньшее количество времени. В настоящей работе также предложено применение лучевых стартеров, которые являются более подходящими для решения широкоугольных параболически уравнений в сравнении с традиционно используемыми начальными условиями Гаусса и Грина.

### **Цели и задачи научно-квалификационной работы.**

Целью настоящей научно-квалификационной работы является разработка эффективного метода моделирования распространения широкополосных акустических сигналов в трёхмерном волноводе мелкого моря и комплекса программ на основе этого метода, позволяющего решать широкий класс задач за разумное время.

В ходе работы на диссертацией были решены следующие задачи.

- Разработать эффективный метод численного решения широкоугольных параболических уравнений для моделирования поля точечного источника звука с возможностью искусственного ограничения расчётной области.
- Разработать комплекс программ на языке программирования C++, позволяющий выполнять моделирование распространения звука в волноводах, имеющих произвольную структуру, путём задания батиметрии, гидрологии и параметров слоёв дна.
- Выполнить всестороннюю валидацию комплекса программ путём решения серии модельных задач и его апробацию в ходе выполнения расчётов

уровней антропогенных акустических сигналов в океане.

### **Научная новизна.**

В работе имеются следующие элементы научной новизны

1. Разработан новый алгоритм численного решения начально-краевых задач для псевдодифференциальных модовых параболических уравнений с граничными условиями прозрачности и начальным условием моделирующим точечный всенаправленный источник колебаний.
2. Разработан новый комплекс программ на языке программирования C++, реализующий предложенный алгоритм численного решения, имеющий возможность указания параметров волновода с использованием конфигурационных файлов и размещённый в открытом доступе.

### **Теоретическая и практическая значимость.**

В диссертации предложен метод моделирования распространения звука в волноводах мелкого моря с использованием модовых параболических уравнений. Предложенный метод реализован в виде комплекса программ на языке программирования C++ и размещён в открытом доступе. Разработанная программа позволяет выполнять трёхмерное моделирование распространения звука, трассировку лучей, соответствующих вертикальным модам, вычисление временного ряда импульса звукового сигнала и уровня звукового воздействия. При этом параметры волновода, модели и вычислений задаются с использованием конфигурационного файла, что существенно упрощает проведение моделирования, сокращая время, затрачиваемое на подготовку вычислений. Также, при разработке комплекса программ, существенное внимание было уделено возможности её использования в качестве заголовочной библиотеки, таким образом реализованный метод решения параболического уравнения может быть интегрирован в другие программы на языке программирования C++.

Теоретическая значимость работы состоит в том, что разработанный комплекс программ позволил исследовать ряд физических эффектов, в частности важность учёта именно эффектов горизонтальной рефракции при моделировании распространения звука в клиновидном волноводе мелкого моря поперёк наклона клина.

## **Методология и методы исследования.**

Алгоритм численного решения псевдодифференциальных модовых параболических уравнений (ПДМПУ) является модификацией известного метода SSP (split-step Padé, метод расщепления Паде), к которому добавлены граничные условия прозрачности для искусственного ограничения расчётной области. При дискретизации дифференциального оператора по поперечной переменной в методе SSP использованы аппроксимации по методу конечных разностей. При задании начальных условий для ПДМПУ используется лучевое представление акустического поля на небольшом расстоянии от точечного источника.

Программная реализация алгоритмы была выполнена на языке программирования C++ с использованием стандарта языка C++20. При разработке особое внимание уделялось возможности использования реализации предложенных алгоритмов в качестве сторонней заголовочной библиотеки, путём широкого использования методов объектно-ориентированного и шаблонного программирования. Библиотека boost была использована для упрощения реализации интерфейса командной строки. Для вычисления дискретного преобразования Фурье использовалась библиотека fftw. Оптимизация операций, связанных с линейной алгеброй, была выполнена с применением библиотеки Eigen. Библиотека SAMBALA использовалась для вычисления модовых функций и соответствующих им волновых чисел. Автоматизация процесса сборки для разных платформ выполнена с использованием программного средства CMake.

## **Степень достоверности и апробация результатов.**

Методы, описанные в работе, а также их программная реализация [A1], были протестированы на множестве модельных задач и на экспериментах с использованием натуральных данных, полученных с подводных акустических регистраторов. Достоверность результатов обуславливается хорошей их согласованностью с известными методами моделирования и результатами на-

турных измерений. Основные результаты научно-квалификационной работы докладывались на следующих конференциях: на конференции «Days on Diffraction» (Санкт-Петербург, 2019 [A2], дистанционно 2022 [A3]), на конференции «РАСОН» (Владивосток, 2019 [A4]) на сессиях Российского акустического общества (дистанционно 2022 [A5], 2023 [A6]), на конференции «Океанологические исследования» (Владивосток, 2023 [A7]).

### **Структура и объём научно-квалификационной работы.**

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы.

Общий объём диссертации 86 страниц, из них 66 страницы текста, включая 16 рисунков и 9 таблиц. Список литературы включает 106 наименований на 14 страницах.

## Глава 1

# Описание предметной области и обоснование постановки задачи

### 1.1 Оценка влияния антропогенных акустических сигналов

С развитием промышленности все больше расширяется хозяйственная деятельность человека, связанная с добычей нефти, газа и разнообразных биоресурсов в акватории мирового океана, в результате которой создаётся огромное количество антропогенных шумов, которые негативно сказываются на морской фауне [10, 11]. Таким образом, возникает задача оценивания и минимизации шумового загрязнения и его воздействия на мировой океан. Ввиду сложности и высокой стоимости прямых измерений, численное моделирование антропогенного шума представляется более перспективным. Основным преимуществом моделирования является возможность вычисления звукового поля как и уже существующих источников, так и планируемых, что позволяет заранее минимизировать влияние человека на океан. Недостатком такого метода является необходимость сбора и обработки изменяющихся данных о состоянии среды, что само по себе является сложной задачей.

Одним из примеров такой задачи является моделирование уровней акустической энергии, распределённой по большому морскому пространству и возникающей ввиду проведения различных промышленных процессов на континентальном шельфе [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]. Действительно, не представляется возможным полностью покрыть интересующее морское пространство приёмниками, поэтому несколько точечных опорных измерений должны быть использованы для восстановления звукового ландшафта морской среды мето-

дами численного моделирования.

## 1.2 Акустическая навигация

С каждым годом хозяйственная деятельность человека всё больше осуществляется с использованием автономных подводных аппаратов, требующих наличия стабильных систем навигации и связи, основанных на распространении звука, при этом привычные системы, основанные на электромагнитном излучении, неприменимы в подобных условиях [19, 20]. При разработке систем подводной акустической навигации возникает задача определения зон уверенного приёма и поиска взаимного расположения источников звукового сигнала таким образом, чтобы минимизировать зоны акустической тени. Также существует задача расчёта траекторий распространения звука на несущих частотах сигналов, с целью определения искривления по сравнению с геодезической на поверхности Земли для вычисления задержки звукового сигнала при осуществлении подводной навигации.

## 1.3 Обзор существующих методов решения

На данный момент существует несколько программных продуктов позволяющих получать численное решение уравнения Гельмгольца (1). BELLHOP [21] и Trac3D [22], основанные на методе суммирования Гауссовых пучков и лучевой теории распространения звука соответственно. Недостатком этих методов является использование геометроакустического приближения, которое является недостаточно точным при моделировании источников звука, имеющих частоту менее 1 кГц. Лин из океанографического института в Вудс-Хоуле и Стюрм из центральной школы Лиона в последнее десятилетие разработали закрытые комплексы программ, основанные на решении трёхмерного параболического уравнения [23, 24, 25], однако решение таких уравнений требует запредельных затрат памяти и времени, вычисление

решения даже самых простых задач занимает не менее суток.

## 1.4 Требования к модели и её программной реализации

Существующие на данный момент программные комплексы в основном сфокусированы на решении какой-то одной мелкой задачи, зачастую являющейся частью чего-то большего, или же направлены на решение какой-то одной конкретной задачи. Также, многие из них не позволяют выполнять вычисления за разумное время. Поэтому возникает необходимость в разработке новой модели, позволяющей выполнять оценку поля акустического давления в некотором спектре задач, не имея привязанности к определённым параметрам. Основными требованиями к программной реализации модели являются:

1. Реализация численных схем решения модовых параболических уравнений.
2. Моделирование звукового поля на трёхмерной сетке.
3. Возможность использования как готовых коэффициентов уравнения, так и коэффициентов, вычисленных с помощью пакета Cambala [26], с указанием необходимых параметров: плотности среды, батиметрии, гидрологии и др.
4. Проведение трассировки горизонтальных лучей, соответствующих вертикальным модам.
5. Вычисление временного ряда импульса звукового сигнала в произвольных точках среды.
6. Оценка уровня шума с использованием интегральной характеристики звукового воздействия.
7. Высокая скорость работы по сравнению с альтернативными методами

моделирования.

## Глава 2

### Математические методы

#### 2.1 Модовое представление звукового поля точечного источника

Звуковое поле  $p(x, y, z)$  (где  $z$  обозначает глубину, а  $x, y$  — координаты горизонтальной плоскости), создаваемое точечным источником в трёхмерном волноводе мелкого моря, расположенным по координатам  $x = y = 0, z = z_s$  и имеющего частоту  $f$ , описывается трёхмерным уравнением Гельмгольца [27]

$$\left( \rho(x, y, z) \nabla \left( \frac{1}{\rho(x, y, z)} \nabla \right) + K^2(x, y, z) \right) p(x, y, z) = -\delta(x) \delta(y) \delta(z - z_s) . \quad (1)$$

Коэффициент  $K(x, y, z)$  представляет собой (комплексное) волновое число среды и определяется как

$$K(x, y, z) = \frac{\omega}{c(x, y, z)} (1 + i\eta\beta(x, y, z)) , \quad (2)$$

где  $c(x, y, z)$  — скорость звука,  $\omega = 2\pi f$  — циклическая частота,  $\beta(x, y, z)$  — коэффициент затухания звука,  $\eta = 1/40\pi \log_{10} e$ .

С использованием техники разделения переменных звуковое поле может быть представлено в виде модового разложения

$$p(x, y, z) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j(x, y) \varphi_j(z, x, y) , \quad (3)$$

где функции  $\varphi_j(z, x, y)$  являются модовыми функциями, а функции  $A_j(x, y)$  — модовыми амплитудами. Функции  $\varphi_j(z, x, y)$  и соответствующие им волновые

числа  $k_j(x, y)$  могут быть получены из решения задачи Штурма-Лиувилля при фиксированных координатах  $x, y$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \varphi_j(z, x, y)}{dz^2} + K^2(z, x, y) \varphi_j(z) = k^2 \varphi_j(z, x, y), \\ \varphi_j|_{z=0} = 0, \\ \varphi_j|_{z=h_i^-} = \varphi_j|_{z=h_i^+}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \Big|_{z=h_i^-} = \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{dz} \Big|_{z=h_i^+}, \\ \varphi|_{z=H} = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Без учёта межмодового взаимодействия функции  $A_j(x, y)$  являются решениями так называемого уравнения горизонтальной рефракции

$$\frac{\partial^2 A_j(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_j(x, y)}{\partial y^2} + k_j^2(x, y) A_j(x, y) = -\delta(x) \delta(y) \varphi_j(z_s, 0, 0). \quad (5)$$

## 2.2 Модовые параболические уравнения

Для получения параболических аппроксимаций выполняется факторизация однородного аналога уравнения горизонтальной рефракции (5) и выбирается его часть, соответствующая волнам, распространяющимся в положительном направлении оси  $x$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - i \sqrt{k_j^2(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}} \right) A_j(x, y) = 0. \quad (6)$$

Вводя модовое опорное волновое число  $k_{j,0}$  и выделяя главную осцилляцию из  $A_j(x, y)$

$$A_j(x, y) = e^{ik_{j,0}x} \mathcal{A}_j(x, y),$$

получим задачу Коши для псевдодифференциального модового параболического уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{A}_j(x, y)}{\partial x} = ik_{j,0} \left( \sqrt{1 + L_j} - 1 \right) \mathcal{A}_j(x, y), \\ \mathcal{A}_j(0, y) = \mathcal{A}_{j,0}(y) \end{cases} \quad (7)$$

где

$$k_{j,0}^2 L_j = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_j^2(x, y) - k_{j,0}^2.$$

## 2.3 Аппроксимация Паде

Для решения уравнения (7) необходимо выполнить линейризацию оператора квадратного корня с использованием аппроксимации Паде. Пусть есть некоторая функция  $F(\lambda)$  тогда её аппроксимация может быть записана в виде

$$F(\lambda) \approx \mathcal{R}(F, l, m)(\lambda) \equiv \frac{P_{l,m}^F(\lambda)}{Q_{l,m}^F(\lambda)}, \quad (8)$$

где  $P_{l,m}^F(\lambda)$ ,  $Q_{l,m}^F(\lambda)$  обозначают многочлены порядка  $l$  и  $m$  соответственно [27]. Коэффициенты многочленов могут быть получены приравниванием рациональной функции  $P_{l,m}^F(\lambda)/Q_{l,m}^F(\lambda)$  к разложению в ряд Тейлора функции  $F(\lambda)$ , содержащей  $l + m + 1$  членов.

### 2.3.1 Аппроксимация оператора квадратного корня

Аппроксимация оператора квадратного корня может быть записана в виде

$$ik_{j,0} \left( \sqrt{1 + L_j} - 1 \right) \approx \frac{P_{l,m}(L_j)}{Q_{l,m}(L_j)}, \quad (9)$$

тогда

$$\frac{\partial \mathcal{A}_j(x, y)}{\partial x} = \frac{P_{l,m}(L_j)}{Q_{l,m}(L_j)} \mathcal{A}_j(x, y). \quad (10)$$

Используя дискретизацию Крэнка-Николсон [28] на равномерной сетке  $x = nh$ , уравнение (10) может быть записано в виде

$$\mathcal{A}_j^{n+1} = \frac{U_{l,m}(L_j)}{W_{l,m}(L_j)} \mathcal{A}_j^n, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} U(L_j) &= -hP_{l,m}(L_j) - 2Q_{l,m}(L_j), \\ W(L_j) &= hP_{l,m}(L_j) - 2Q_{l,m}(L_j), \end{aligned}$$

многочлены степени  $p = \max(l, m)$ . Положив  $l \leq m$  и разложив отношение  $U(L_j)/W(L_j)$  на простые дроби, получим

$$\mathcal{A}_j^{n+1} = \left( a_{l,m}^0 + \sum_{i=1}^p \frac{a_{l,m}^i}{1 + b_{l,m}^i L_j} \right) \mathcal{A}_j^n. \quad (12)$$

### 2.3.2 Метод аппроксимации Паде для пропагатора

Другой подход к решению (7) был независимо предложен Авиловым [29] и Коллинзом [30]. В его основе лежит смена порядка дискретизации и применения аппроксимации Паде. При достаточно маленьком интервале  $\Delta x = h$  уравнение (7) может быть формально решено в виде

$$\mathcal{A}_j^{n+1} = e^{ik_{j,0}h(\sqrt{1+L_j}-1)} \mathcal{A}_j^n. \quad (13)$$

Затем, применяя аппроксимацию Паде для экспоненты в виде разложения на простые дроби аналогично аппроксимации квадратного корня

$$e^{ik_{j,0}h(\sqrt{1+L_j}-1)} \approx \frac{\tilde{U}_{l,m}(L_j)}{\tilde{W}_{l,m}(L_j)} = \tilde{a}_{l,m}^0 + \sum_{i=1}^p \frac{\tilde{a}_{l,m}^i}{1 + \tilde{b}_{l,m}^i L_j}, \quad (14)$$

получим

$$\mathcal{A}_j^{n+1} = \left( \tilde{a}_{l,m}^0 + \sum_{i=1}^p \frac{\tilde{a}_{l,m}^i}{1 + \tilde{b}_{l,m}^i L_j} \right) \mathcal{A}_j^n. \quad (15)$$

Очевидно, что полиномы  $\tilde{U}(L_j)$ ,  $\tilde{W}(L_j)$  отличаются от  $U(L_j)$ ,  $W(L_j)$ , также как и коэффициенты их разложения на простые дроби  $\tilde{a}_{l,m}^i, \tilde{b}_{l,m}^i$  и  $a_{l,m}^i, b_{l,m}^i$ . Однако, в остальном уравнения (12) и (15) полностью идентичны.

## 2.4 Дискретизация оператора $L_j$

Для дискретизации уравнения (12) на равномерной сетке  $y_q = y_0 + q\delta$  с шагом  $\Delta y = \delta$  используется стандартная конечно-разностная схема

$$D_\delta^2 \mathcal{A}_j^{n+1} = \frac{\mathcal{A}_j^{n+1,q+1} - 2\mathcal{A}_j^{n+1,q} + \mathcal{A}_j^{n+1,q-1}}{\delta^2}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad (16)$$

где  $\mathcal{A}_j^{n,q} \sim \mathcal{A}_j(x_n, y_q)$ . Таким образом, уравнение (12) преобразуется к виду

$$\mathcal{A}_j^{n+1,q} = \left( a_{l,m}^0 + \sum_{i=1}^p \frac{a_{l,m}^i}{1 + b_{l,m}^i L_j^\delta} \right) \mathcal{A}_j^{n,q}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

где  $k_{j,0}^2 L_j^\delta = D_\delta^2 + k_j^2 - k_{j,0}^2$ . Будем искать  $\mathcal{A}_j^{n+1,q}$  в виде

$$\mathcal{A}_j^{n+1,q} = a_{l,m}^0 \mathcal{A}_j^{n,q} + \sum_{i=1}^p a_{l,m}^i \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q}, \quad (18)$$

тогда

$$a_{l,m}^0 \mathcal{A}_j^{n,q} + \sum_{i=1}^p a_{l,m}^i \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q} = \left( a_{l,m}^0 + \sum_{i=1}^p \frac{a_{l,m}^i}{1 + b_{l,m}^i L_j^\delta} \right) \mathcal{A}_j^{n,q}. \quad (19)$$

Приравнявая слагаемые при одинаковом  $i$ , получим набор выражений, из которых могут быть найдены значения вспомогательных функций  $\mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q}$

$$(1 + b_{l,m}^i L_j^\delta) \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q} = \mathcal{A}_j^{n,q}, \quad i = \overline{1, p}. \quad (20)$$

Используя равенства (16) и  $k_{j,0}^2 L_j^\delta = D_\delta^2 + k_j^2 - k_{j,0}^2$ , получим

$$\underbrace{\frac{b_{l,m}^i}{k_{j,0}^2 \delta^2} \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q-1}}_{\alpha_{j,i}} + \underbrace{\left(1 + \frac{b_{l,m}^i}{k_{j,0}^2} \left(k_j^2 - k_{j,0}^2 - \frac{2}{\delta^2}\right)\right)}_{\beta_{j,i}} \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q} + \underbrace{\frac{b_{l,m}^i}{k_{j,0}^2 \delta^2} \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q+1}}_{\gamma_{j,i}} = \mathcal{A}_j^{n,q}. \quad (21)$$

Таким образом, коэффициенты  $\mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q}$  могут быть легко найдены обращением матриц с диагоналями  $\alpha_{j,i}, \beta_{j,i}, \gamma_{j,i}$  методом прогонки [31].

## 2.5 Граничные условия

Одной из особенностей МПУ является то, что их решение всегда рассматривается в неограниченной горизонтальной области. Таким образом, искусственное ограничение вычислительной области является обязательным при численном решении МПУ. В рамках данной работы были использованы согласованные поглощающие слои.

В основе согласованных поглощающих слоёв (perfectly matching layers, PML) лежит расширение вычислительной области с целью плавного поглощения волн исходящих из неё. Пусть требуется найти решение уравнения (7) в области  $\Omega = [0, x_1] \times [y_0, y_1]$ . Сформируем новую область  $\bar{\Omega} = [0, x_1] \times [y_0 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon]$ , расширив  $\Omega$  на  $\varepsilon$  с обеих сторон вдоль оси  $y$ . Заменим оператор  $L_j$  в уравнении (7) оператором  $L_j^{PML}$ , определяемым как

$$k_{j,0}^2 L_j^{PML} = \frac{1}{1 + i\beta(y)} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{1 + i\beta(y)} \frac{\partial}{\partial y} + k_j^2 + k_{j,0}^2, \quad (22)$$

где  $\beta(y)$  – некоторая гладкая функция, монотонно убывающая на интервале  $[y_0 - \varepsilon, y_0)$ , возрастающая на  $(y_1, y_1 + \varepsilon]$ , и  $\beta(y) = 0$  при  $y \in [y_0, y_1]$ . Таким образом, оператор  $L_j^{PML}$  совпадает с оператором  $L_j$  внутри области  $\Omega$ . На новых границах  $y_0 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon$  устанавливаются стандартные однородные условия Дирихле

$$\mathcal{A}_j|_{y=y_0-\varepsilon} = \mathcal{A}_j|_{y=y_1+\varepsilon} = 0. \quad (23)$$

Таким образом, применимость PML граничных условий зависит от значения параметра  $\varepsilon$ , который должен быть существенно большим, чтобы сгладить исходящие волны, и функции  $\beta(y)$ , которая в свою очередь должна существенно гладко достигать своего максимального значения при погружении в PML.

В рамках данной работы была использована следующая функция  $\beta(y)$

$$\beta(y) = \beta_0 \left( \frac{|y - y_b|}{\varepsilon} \right)^3 = \beta_0 \zeta^3 \equiv \beta(\zeta), \quad \zeta \in [0, 1], \quad (24)$$

где  $y_b$  – соответствующая граница области  $\Omega$ ,  $\beta_0 \in \mathbb{R}_+$  – параметр масштаба.

### 2.5.0.1 Дискретизация оператора $L_j^{PML}$

Для дискретизации оператора  $L_j^{PML}$  на равномерной сетке  $y_q = y_0 - \varepsilon + q\delta$  используется стандартная конечно-разностная схема для первой производной с половинным шагом. Тогда оператор  $L_j^{PML}$  на равномерной сетке принимает вид

$$k_{j,0}^2 \delta^q L_j^{PML} = \frac{1}{1 + i\beta(y_q)} D_{q/2}^1 \left( \frac{1}{1 + i\beta(y_q)} D_{q/2}^1 \right) + k_j^2 - k_{j,0}^2. \quad (25)$$

Тогда, численная схема уравнения в PML области принимает вид

$$\underbrace{\frac{b_{l,m}^i \mu_q \mu_{q-1/2}}{k_0^2 \delta^2} \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q-1}}_{\tilde{\alpha}_{j,i}^q} + \underbrace{\left( 1 + \frac{b_{l,m}^i}{k_{j,0}^2} \left( k_j^2 - k_{j,0}^2 - \frac{\mu_q}{\delta^2} (\mu_{q-1/2} + \mu_{q+1/2}) \right) \right)}_{\tilde{\beta}_{j,i}^q} \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q} + \underbrace{\frac{b_{l,m}^i \mu_q \mu_{q+1/2}}{k_0^2 \delta^2} \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q+1}}_{\tilde{\gamma}_{j,i}^q} = \mathcal{A}_j^{n,q}, \quad (26)$$

где  $\mu_q = 1/(1+i\beta(y_q))$ . Получившаяся численная схема также может быть выражена трёхдиагональной матрицей. Таким образом, использование PML требует лишь небольшого изменения коэффициентов численной схемы.

## 2.6 Лучевая теория для уравнения горизонтальной рефракции

Предполагая, что волновые числа  $k_j(x, y)$  являются медленно изменяющейся функцией, решение уравнения (5) с использованием лучевой теории распространения звука может быть выражено в виде

$$A_j(x, y) = M_j(x, y) e^{ik_{j,0}S_j(x,y)} + o(1/k_{j,0}), \quad (27)$$

где функция  $S_j(x, y)$  называется эйконалом и может быть найдена из уравнения Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S_j(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_j(x, y)}{\partial y}\right)^2 = n_j(x, y), \quad (28)$$

где  $n_j(x, y) \equiv k_j(x, y)/k_{j,0}$  — индекс горизонтальной рефракции [32]. Амплитуда  $M_j(x, y)$  может быть получена из уравнения переноса вида

$$2 \left( \frac{\partial S_j(x, y)}{\partial x} \frac{\partial M_j(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial S_j(x, y)}{\partial y} \frac{\partial M_j(x, y)}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2 S_j(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_j(x, y)}{\partial y^2} \right) M_j(x, y) = 0. \quad (29)$$

Решение этих уравнений связано с решением системы Гамильтоновой системы задач Коши

$$\begin{cases} \frac{dx_j(l)}{dl} = \frac{\xi_j(l)}{n_j(x_j, y_j)}, \\ x_j(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\xi_j(l)}{dl} = \frac{\partial n_j(x_j, y_j)}{\partial x_j}, \\ \xi_j(0) = \cos \alpha, \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \frac{dy_j(l)}{dl} = \frac{\eta_j(l)}{n_j(x_j, y_j)}, \\ y_j(0) = y_s, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\eta_j(l)}{dl} = \frac{\partial n_j(x_j, y_j)}{\partial y_j}, \\ \eta_j(0) = \sin \alpha. \end{cases}$$

где  $l$  является натуральным параметром, обозначающим длину кривой вдоль траектории распространения луча, а  $\xi, \eta$  сопряжённые переменные к  $x, y$  — момент. Каждое уравнение системы представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение, численное решение которых может быть выполнено с использованием методов Рунге-Кутты.

## 2.7 Начальные условия

От выбора начальных условий зависит устойчивость получаемого численного решения. Для параболических уравнений наиболее часто используются начальные условия Гаусса и Грина [27]. Однако такие условия имеют недостаточно широкую апертуру, создавая численный шум даже при небольшом порядке аппроксимации нелинейного оператора уравнения.

Для использования высоких порядков аппроксимации Паде необходимо начальное условие, учитывающее широкоугольные особенности решаемого уравнения. Такое условие может быть получено с использованием лучевой теории распространения звука. Предположим, что при  $0 \leq x \leq x_0$ , где  $x_0$  сравнимо с длиной волны, свойства среды не зависят от  $x$ , то есть  $k_j = k_j(y)$ . Тогда, решение (7) может быть записано в виде

$$\mathcal{A}_j(x_0, y) = M_j(x_0, y) e^{ik_{j,0}S_j(x_0, y)} + o(1/k_{j,0}), \quad (31)$$

где  $M_j(x, y)$  — амплитуда нулевого порядка, удовлетворяющая уравнению переноса (29),  $S_j(x, y)$  — функция эйконала, удовлетворяющая уравнению Гамильтона-Якоби (28). Оба эти уравнения могут быть получены из решения системы Гамильтона (30) вдоль кривой распространения звукового луча в

виде

$$S_j(y(l, \alpha)) = \int_0^l n_j(y(l, \alpha)) dl, \quad (32)$$

$$M_j(y(l, \alpha)) = \frac{M_{j,0}}{n_j(y(l, \alpha))} \sqrt{\frac{\cos \alpha}{\partial y(l, \alpha) / \partial \alpha}}, \quad (33)$$

где  $M_{j,0} = e^{i\pi/4} / \sqrt{8\pi k_{j,0}}$  — амплитуда на расстоянии 1 м. от источника,  $n_j(l) = k_j(l) / k_{j,0}$  — горизонтальный показатель преломления.

Так как значения функций  $S_j(x_0, y)$  и  $M_j(x_0, y)$  вычисляются лишь на небольшом расстоянии  $x_0$  (несколько десятков метров), в большинстве случаев будет достаточно начального условия рассчитанного для однородной среды при  $k_j(x, y) \equiv k_{j,0}$ . В таком случае получим

$$\begin{aligned} S_j(y) &= r(y), \\ M_j(y) &= \frac{M_{j,0}}{r(y)}, \\ r(y) &= \sqrt{x_0^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

## 2.8 Расчёт временных рядов в точках приёма при распространении импульсных акустических сигналов

Задача состоит в вычислении в точках приёма  $R = \{(x, y, z) \in \Omega\}$  временного ряда импульса сигнала в источнике  $S = (x_0, y_s, z_s)$ , задаваемого функцией  $g(t)$ . Импульс  $I_r(t)$  в приёмнике  $r$  в спектральной области Фурье определяется следующей функцией

$$\hat{I}_r(\xi) = \overline{\hat{P}(x_r, y_r, z_r, \xi)} \cdot e^{-i\tau\omega(\xi)}, \quad (35)$$

где  $\omega(\xi) = 2\pi f(\xi)$  – циклическая частота источника,  $f(\xi)$  – частота источника,  $\tau$  – время движения звука из источника в приёмник, и

$$\hat{P}(x, y, z, \xi) = p(x, y, z, f(\xi)) \cdot \bar{\hat{g}}(\xi), \quad (36)$$

здесь  $p(x, y, z, f(\xi))$  – звуковое поле источника, вычисленное для частоты  $f(\xi)$ . Значение  $\hat{g}(\xi)$  также может быть оценено как

$$\hat{g}(\xi) = \frac{\hat{I}_{r_0}(\xi)}{p(x, y, z, f(\xi))}, \quad (37)$$

где  $r_0$  – индекс опорного источника.

## 2.9 Уровень звукового воздействия

Уровень звукового воздействия (sound exposure level, SEL) для диапазона частот  $[f_1, f_2]$  некоторого источника задаётся следующим интегралом

$$\text{SEL}(x, y, z, f_1, f_2) = \int_{f_1}^{f_2} \left| \hat{P}(x, y, z, \xi(f)) \right|^2 df, \quad (38)$$

где  $\hat{P}$  – функция сигнала в точке  $(x, y, z)$  (36). Полученная величина является достаточно грубой, поэтому при численном вычислении используется простой метод трапеций на равномерной сетке [33]

$$\text{SEL}_{i,j,k} = df \sum_{s=0}^{n_f-1} \left| \hat{P}_{i,j,k,s} \right|^2. \quad (39)$$

## 2.10 Колебательные скорость и ускорение

Колебательное ускорение  $\mathbf{a}(x, y, z)$  может быть вычислено через градиент акустического давления

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = \left\{ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (40)$$

Используя модовое разложение (3) и извлекая главную осцилляцию  $e^{ik_{j,0}x}$ , запишем производные акустического давления по пространственным координатам

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (e^{ik_{j,0}x} \mathcal{A}_j \varphi_j) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{ik_{j,0}x} \left( ik_{j,0} \mathcal{A}_j \varphi_j + \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{A}_j \varphi_j) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{ik_{j,0}x} \left( ik_{j,0} \mathcal{A}_j \varphi_j + \frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial x} \varphi_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \mathcal{A}_j \right), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \sum_{i=1}^{\infty} e^{ik_{j,0}x} \frac{\partial}{\partial y} (\mathcal{A}_j \varphi_j) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{ik_{j,0}x} \left( \frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial y} \varphi_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \mathcal{A}_j \right), \quad (42)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \sum_{i=1}^{\infty} e^{ik_{j,0}x} \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{A}_j \varphi_j) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{ik_{j,0}x} \mathcal{A}_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}. \quad (43)$$

Удаление главной осцилляции позволяет перейти к производным по медленно изменяющимся функциям, что в свою очередь приводит к высокой численной стабильности при проведении численного дифференцирования даже простыми конечными разностями.

Колебательная скорость  $\mathbf{v}(x, y, z)$  также может быть выражена через градиент акустического давления. Используя тот факт, что в частотной области  $\mathbf{a} = -i\omega \mathbf{v}$  получим

$$\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\} = \left\{ \frac{i}{\omega} a_x, \frac{i}{\omega} a_y, \frac{i}{\omega} a_z \right\} = -\frac{i}{\omega \rho} \nabla p. \quad (44)$$

Результаты второй главы опубликованы в работах [A8, A9, A10].

## Глава 3

# Реализация метода расчёта акустических полей и его верификация на модельных задачах

### 3.1 Описание комплекса программ

В рамках данной работы была разработана программа, реализующая методы моделирования звука, описание которых было приведено в Главе 2. Исходный код программы расположен в открытом доступе по адресу: <https://github.com/GoldFeniks/Ample>. В рамках данной работы было сделано 162 коммита, добавлено 18028 и удалено 8505 строк кода на языке программирования C++. Разработанный комплекс программ имеет следующие возможности

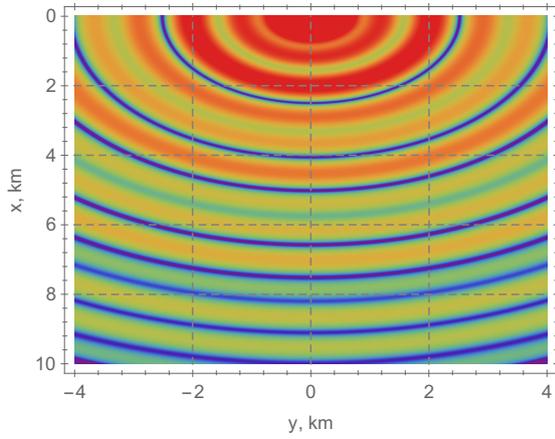
- Вычисление трёхмерного поля звукового давления на основе решения широкоугольных модовых параболических уравнений.
- Вычисление вертикальных мод на основе заданных параметров среды (гидрология, батиметрия, параметры слоёв) или использование предварительно рассчитанных значений.
- Проведение трассировки горизонтальных лучей, соответствующих вертикальным модам.
- Вычисление временного ряда импульса звукового сигнала в произвольных точках среды и SEL.
- Вычисление поля колебательных ускорений.
- Реализация лучевых начальных условий и PML.

- Высокая скорость работы за счёт использования параллельных вычислений.
- Конфигурация вычислений с использованием текстового файла в формате JSON.

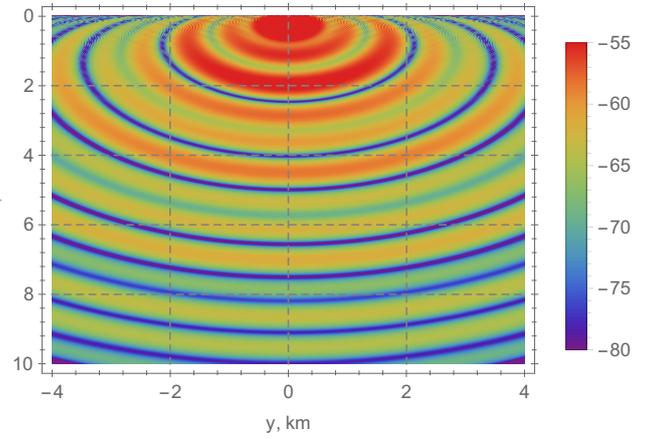
## 3.2 Вычислительные эксперименты

### 3.2.1 Волновод мелкого моря с плоским дном

Проверка корректности работы вычислительных схем и PML граничных условий была проведена на примере моделирования акустических волн в волноводе Пекериса, являющимся волноводом с постоянной глубиной дна, поэтому волновые числа постоянны, а модовые функции зависят только от глубины. Сравнение результатов моделирования при разных значениях порядка аппроксимации Паде приведены на Рисунке 1. Из рисунка видно, что использование лучевых начальных условий и большего порядка аппроксимации позволяет добиться существенно лучших результатов по сравнению с обычным широкоугольным параболическим уравнением.



(a) Аналитическое решение



(b) Решение ММП

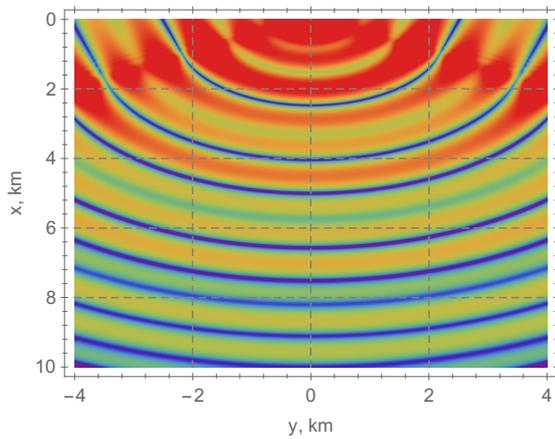
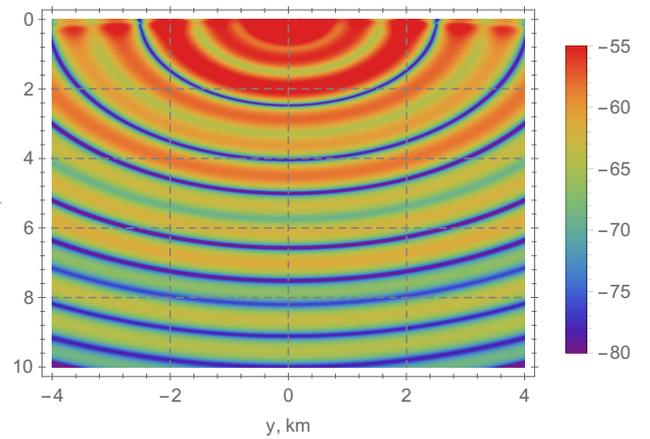
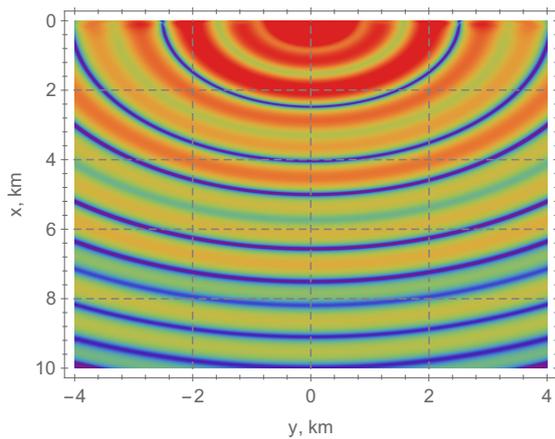
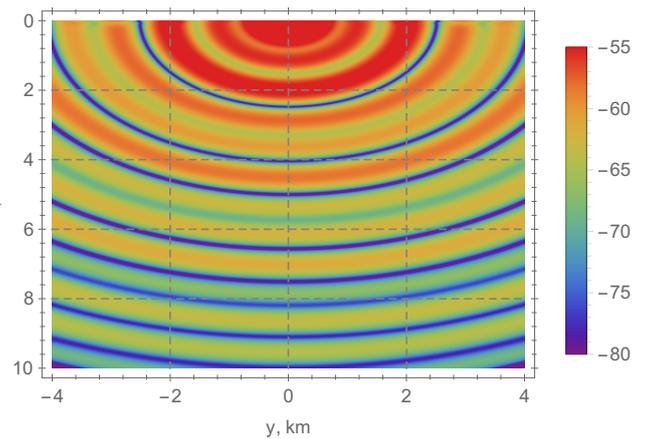
(c) SSP,  $p = 1$ (d) SSP,  $p = 5$ (e) SSP,  $p = 9$ (f) SSP,  $p = 17$ 

Рисунок 1 – Акустическое поле (в дБ отн. 1 м.) в волноводе Пекериса на глубине  $z = 30$  м. с использованием лучевых начальных условий

### 3.2.2 Клиновидный волновод мелкого моря

Следующий вычислительный эксперимент был проведён для моделирования распространения звуковых волн в мелком море с подводным клином. Схематическое изображение этого волновода дано на Рисунке 2.

Результат вычислений показан на Рисунке 3. Было проведено сравнение с решением методом изображений [34, 35]. Из сравнения результатов моделирования на Рисунке 4 видно, что решения всех методов почти совпадают, не смотря на адиабатическую природу модовых параболических уравнений, при этом большая апертура SSP метода ещё сильнее приближает решение к решению методом изображений вдали от источника.

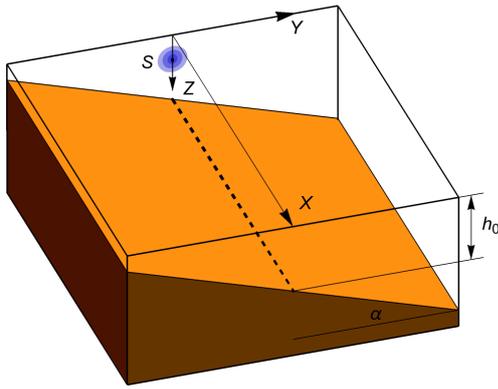


Рисунок 2 – Схематическое изображение подводного клина

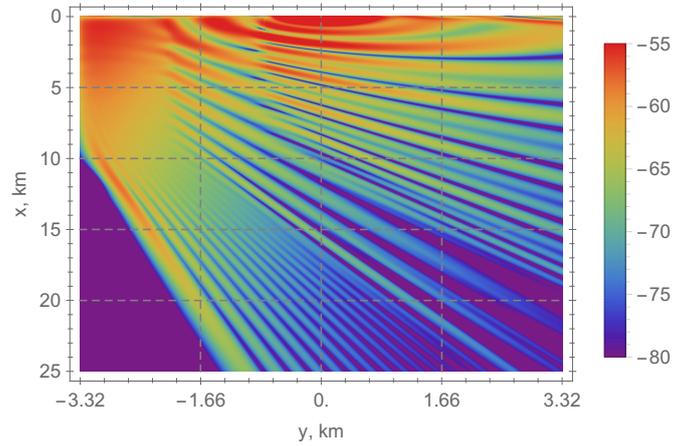


Рисунок 3 – Акустическое поле (в дБ отн. 1 м.) в клиновидном прибрежном волноводе мелкого моря  $z = 30$  м.

Также была рассмотрена задача трассировки горизонтальных лучей. Координаты распространения лучей могут быть вычислены из криволинейного интеграла вида

$$x(S, \psi) = \int_{l_S^\psi}^S \frac{dy(s, \psi)}{\sqrt{\frac{k_j^2(y(s, \psi))}{k_j^2(0) \cos^2(\psi)} - 1}} = \int_0^S \frac{y'_t(s, \psi) ds}{\sqrt{\frac{k_j^2(y(s, \psi))}{k_j^2(0) \cos^2(\psi)} - 1}}. \quad (45)$$

Сравнение результатов моделирования с использованием программы AMPLE и численного интегрирования (45) представлены на Рис. 5.

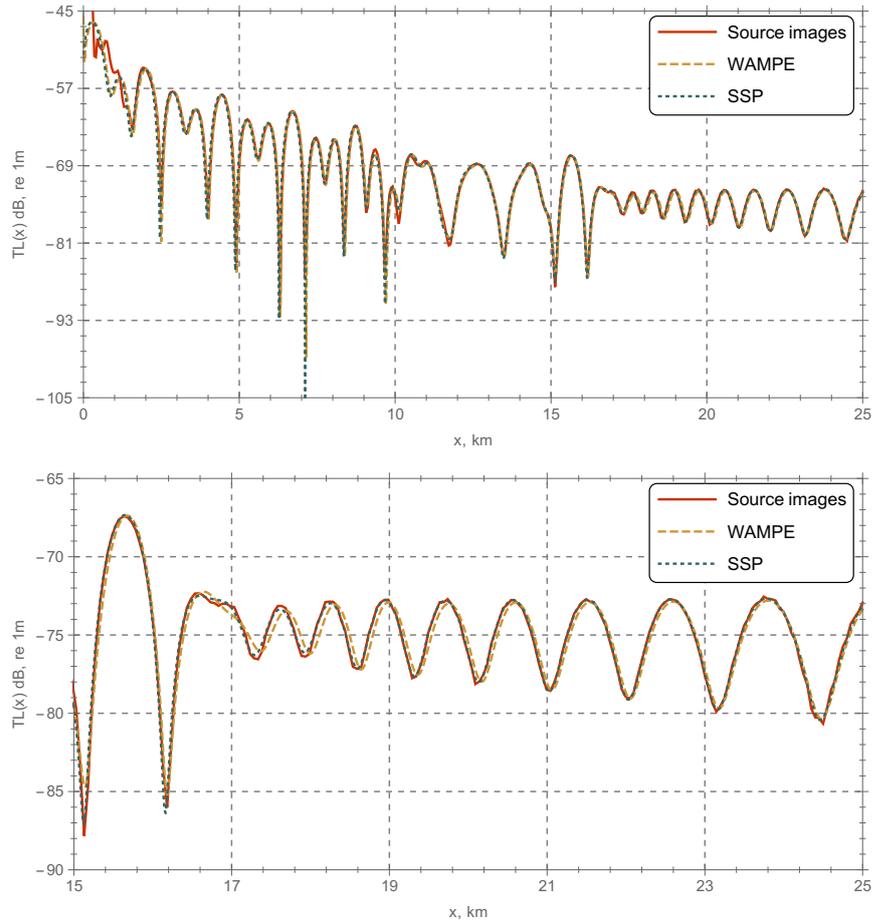


Рисунок 4 – Сравнение результатов вычисления акустического поля с использованием метода мнимых источников, метода широкоугольного параболического уравнения и метода SSP (AMPLE) (в дБ отн. 1 м.) в мелком море с подводным клином при  $y = 0$  км.

Следующим было рассмотрено моделирование распространения импульсного акустического сигнала. Функция источника была выбрана следующим образом

$$f(t) = A\beta_n H_n^{(1)}\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right) e^{-\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2}, \quad (46)$$

где  $A \in \mathbb{R}$  – параметр масштаба,  $t_0$  – центральное время,  $\sigma$  – параметр ширины функции,  $H_n^{(1)}$  – функция Ханкеля первого рода порядка  $n$ , а  $\beta_n$  определено как

$$\beta_n = \begin{cases} \frac{k!}{n!}, & n = 2k, \\ \frac{k!\sqrt{4k+3}}{(2k)!(4k+2)}, & n = 2k+1. \end{cases} \quad (47)$$

Графики функции и спектра источника отображены на Рисунке 6. Сравне-

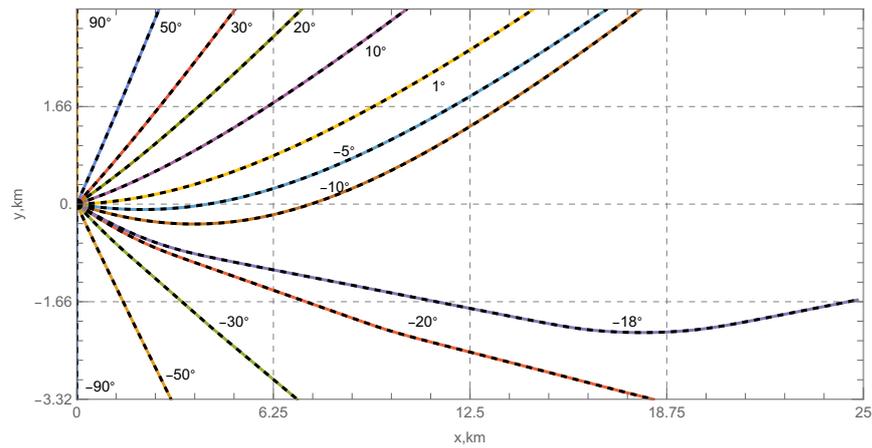


Рисунок 5 – Сравнение трассировки лучей путём численного решения системы (30) (сплошная кривая) и численного интегрирования (45) (пунктирная кривая) для третьей распространяющейся моды.

ние результатов моделирования было проведено с решением методом изображений [34, 35]. Из результатов сравнения на Рисунке 7 видно, что решения показывают хорошую сходимость, при этом наибольшее отличие наблюдается в предвестнике, которое возникает из-за ограничений модового разложения при распространении на низких частотах на больших расстояниях.

Результаты третьей главы опубликованы в работах и представлены на конференциях [A11, A10, A12, A2]

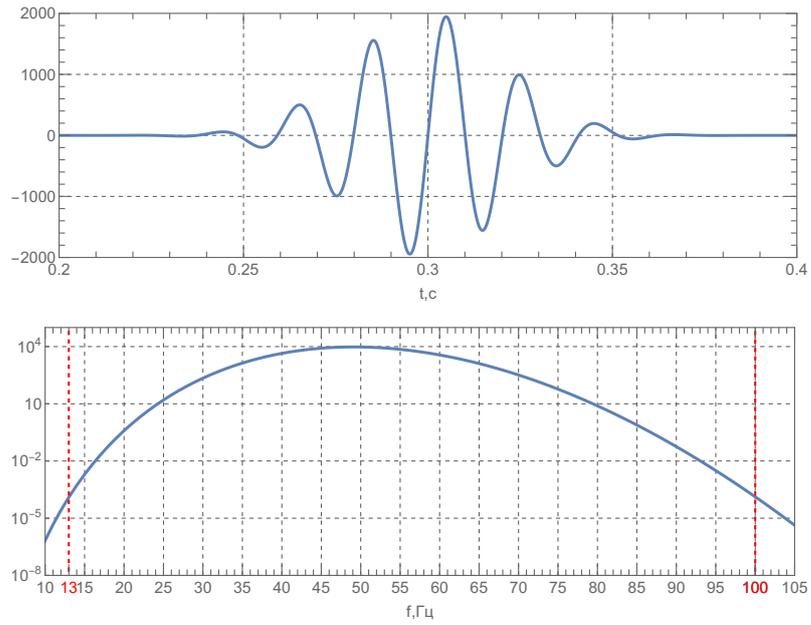


Рисунок 6 – Функция и спектр источника при моделировании распространения импульсных сигналов в клиновидном волноводе мелкого моря. Красной пунктирной линией отмечены границы рассматриваемых частот

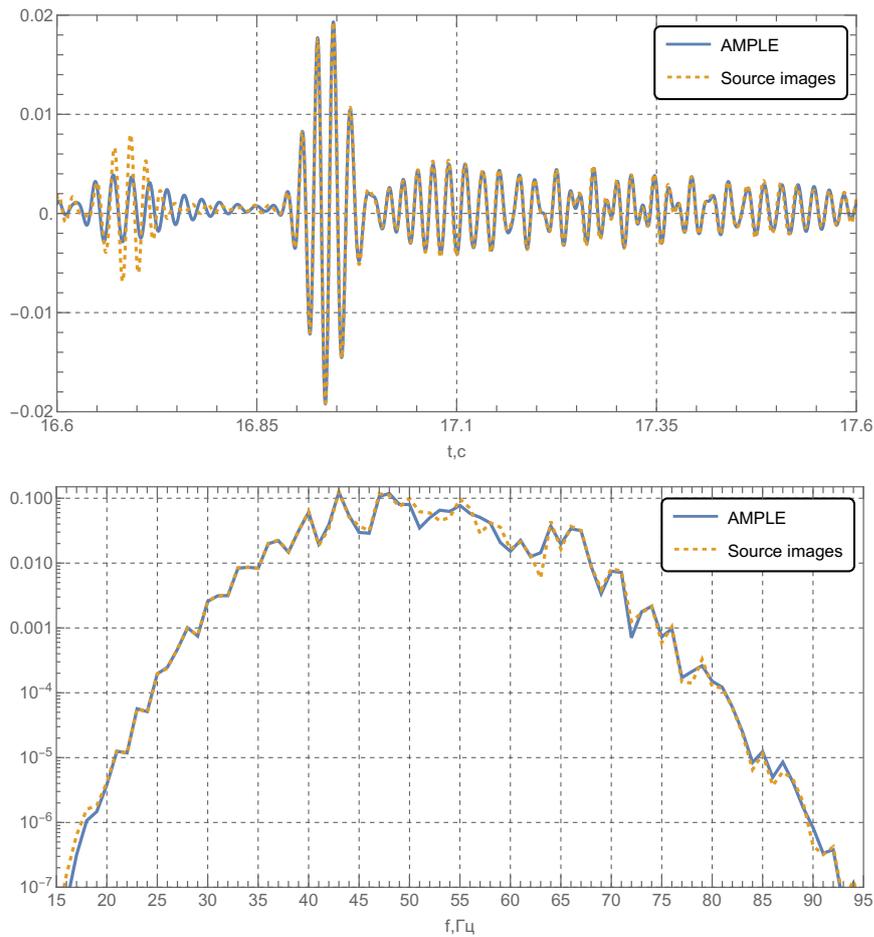


Рисунок 7 – Сравнение результатов вычисления временного ряда в приёмнике (сверху) и его спектра (снизу) при распространении импульсного акустического сигнала в клиновидном волноводе мелкого моря

## Заключение

Таким образом, в рамках данной работы были получены следующие результаты

- Разработана и апробирована методика численного решения псевдодифференциальных модовых параболических уравнений с искусственным ограничением расчётной области путём постановки граничных условий прозрачности или добавления к ней согласованных поглощающих слоёв.
- Разработан комплекс программ на языке программирования C++, который может быть использован для моделирования распространения тональных и импульсных сигналов, а также вычисления скалярных и векторных акустических полей антропогенных шумов в океане с возможностью учёта батиметрических и гидрологических данных и структуры слоёв дна, и ориентированный на максимальную производительность.

## Цитированная литература

1. Lee D., Schultz M. H. Numerical Ocean Acoustic Propagation in Three Dimensions. — WORLD SCIENTIFIC, 1995.
2. TOLSTOY A. 3-D PROPAGATION ISSUES AND MODELS // Journal of Computational Acoustics. — 1996. — Vol. 04, no. 03. — P. 243–271.
3. Three-dimensional finite element simulation of acoustic propagation in spiral bubble net of humpback whale / X. Qing, P. R. White, T. G. Leighton, S. Liu, G. Qiao, Y. Zhang // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1982–1995.
4. Ivansson S. Local accuracy of cross-term corrections of three-dimensional parabolic-equation models // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 2030–2040.
5. Porter M. B. Beam tracing for two- and three-dimensional problems in ocean acoustics // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 2016–2029.
6. Multiscale multiphysics data-informed modeling for three-dimensional ocean acoustic simulation and prediction / T. F. Duda, Y.-T. Lin, A. E. Newhall, K. R. Helfrich, J. F. Lynch, W. G. Zhang, P. F. J. Lermusiaux, J. Wilkin // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1996–2015.
7. Calazan R., Rodríguez O. TRACEO3D Ray Tracing Model for Underwater Noise Predictions //. — 03/2017. — P. 183–190.
8. Porter M. The KRAKEN normal mode program //. — 1992.
9. Duda T. F. Initial results from a Cartesian three-dimensional parabolic equation acoustical propagation code. — 2006.

10. The Effects of Ship Noise on Marine Mammals—A Review / C. Erbe, S. A. Marley, R. P. Schoeman, J. N. Smith, L. E. Trigg, C. B. Embling // *Frontiers in Marine Science*. — 2019. — Vol. 6. — P. 606.
11. Impacts of anthropogenic noise on marine life: Publication patterns, new discoveries, and future directions in research and management / R. Williams, A. J. Wright, E. Ashe, L. K. Blight, R. Bruintjes, R. Canessa, C. Clark, S. Cullis-Suzuki, D. T. Dakin, C. Erbe, P. S. Hammond, N. D. Merchant, P. D. O’Hara, J. Purser, A. N. Radford, S. D. Simpson, L. Thomas, M. A. Wale // *Ocean & Coastal Management*. — 2015. — Vol. 115. — P. 17–24.
12. Calibrating and monitoring the western gray whale mitigation zone and estimating acoustic transmission during a 3D seismic survey, Sakhalin Island, Russia / A. Rutenko, S. Borisov, A. Gritsenko, M. Jenkerson // *Environmental monitoring and assessment*. — 2007. — Vol. 134, no. 1. — P. 21–44.
13. Responsible practices for minimizing and monitoring environmental impacts of marine seismic surveys with an emphasis on marine mammals / D. P. Nowacek, K. Bröker, G. Donovan, G. Gailey, R. Racca, R. R. Reeves, A. I. Vedenev, D. W. Weller, B. L. Southall // *Aquatic Mammals*. — 2013. — Vol. 39, no. 4. — P. 356.
14. Monitoring the acoustic field of seismic survey pulses in the near-coastal zone / A. Rutenko, D. Borovoi, V. Gritsenko, P. Petrov, V. Ushchipovskii, M. Boekholt // *Acoustical Physics*. — 2012. — Vol. 58, no. 3. — P. 326–338.
15. Bailey H., Brookes K. L., Thompson P. M. Assessing environmental impacts of offshore wind farms: lessons learned and recommendations for the future // *Aquatic biosystems*. — 2014. — Vol. 10, no. 1. — P. 1–13.

16. Monitoring the gray whale sound exposure mitigation zone and estimating acoustic transmission during a 4-D seismic survey, Sakhalin Island, Russia / R. Racca, M. Austin, A. Rutenko, K. Bröker // *Endangered Species Research*. — 2015. — Vol. 29, no. 2. — P. 131–146.
17. Lucke K., Martin S. B., Racca R. Evaluating the predictive strength of underwater noise exposure criteria for marine mammals // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 2020. — Vol. 147, no. 6. — P. 3985.
18. Bröker K. C. Monitoring and mitigation of the sound effects of hydrocarbon exploration activities on marine mammal populations : PhD thesis / Bröker Koen C.A. — University of Groningen, 09/2021.
19. Исследование возможности позиционирования автономных подводных аппаратов при выполнении ими глубоководных миссий / Ю. Н. Моргунов, С. И. Каменев, В. В. Безответных, П. С. Петров // *Подводные исследования и робототехника*. — 2019.
20. Экспериментальное и теоретическое исследование времен прихода и эффективных скоростей при дальнем распространении импульсных акустических сигналов вдоль кромки шельфа в мелком море / П. С. Петров, А. А. Голов, В. В. Безответных, А. В. Буренин, С. Б. Козицкий, М. А. Сорокин, Ю. Н. Моргунов // *Акустический журнал*. — 2020. — Т. 66, № 1. — С. 20—33.
21. The BELLHOP Manual and User's Guide [Electronic Resource]. — URL: <http://oalib.hlsresearch.com/Rays/HLS-2010-1.pdf> (visited on 07/23/2024).
22. Calazan R. M., Rodríguez O. C. TRACEO3D Ray Tracing Model for Underwater Noise Predictions // *Technological Innovation for Smart Systems*. — Springer International Publishing, 2017. — P. 183–190.

23. Isakson M. J., Goldsberry B., Chotiros N. P. A three-dimensional longitudinally-invariant finite element model for acoustic propagation in shallow water waveguides // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2014. — Vol. 136, no. 3. — EL206.
24. Lin Y.-T., Collis J. M., Duda T. F. A three-dimensional parabolic equation model of sound propagation using higher-order operator splitting and Padé approximants // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2012. — Vol. 125, no. 5. — EL364.
25. Sturm F. Leading-order cross term correction of three-dimensional parabolic equation models // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2016. — Vol. 139, no. 1. — P. 263–270.
26. Petrov P. S., Zaikin O., Tyshchenko A. G. Cambala [Электронный ресурс]. — URL: <https://github.com/Nauchnik/CAMBALA> (дата обращения: 23.07.2024).
27. Computational Ocean Acoustics / F. A. Jensen, W. Kuperman, M. Porter, H. Schmidt. — 2nd ed. — New York : Springer, 2011.
28. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type // P. Adv Comput Math. — 1996. — Vol. 6, no. 1. — P. 207–226.
29. Авилов К. В. Псевдодифференциальные параболические уравнения рас пространения звука в океане, плавно неоднородном по горизонтали, и их численное решени // Акустический журнал. — 1995. — Т. 41, № 1. — С. 5—12.
30. Collins M. D. A split-step Padé solution for the parabolic equation method // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1993. — Vol. 93, no. 4. — P. 1736–1742.

31. Абрамов А. А., Андреев В. Б. О применении метода прогонки к нахождению периодических решений дифференциальных и разностных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1963. — Vol. 3, no. 2. — P. 377–381.
32. Burridge R., Weinberg H. Horizontal rays and vertical modes // Wave Propagation and Underwater Acoustics. — 1977. — P. 86–152.
33. Davis P. J., Rabinowitz P. Chapter 2 - Approximate Integration over a Finite Interval // Methods of Numerical Integration (Second Edition) / ed. by P. J. Davis, P. Rabinowitz. — 2nd ed. — Academic Press, 1984. — P. 51–198.
34. Deane G. B., Buckingham M. J. An analysis of the three-dimensional sound field in a penetrable wedge with a stratified fluid or elastic basement // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1993. — Vol. 93, no. 3. — P. 1319–1328.
35. On the Method of Source Images for the Wedge Problem Solution in Ocean Acoustics: Some Corrections and Appendices / J. Tang, P. Petrov, S. Piao, S. Kozitskiy // Acoustical Physics. — 2018. — Mar. — Vol. 64. — P. 225–236.

## Список публикаций

- A1. Тыщенко А. Г. AMPLE [Электронный ресурс]. — URL: <https://github.com/GoldFeniks/AMPLE> (дата обращения: 23.07.2024).
- A2. Tyshchenko A. G., Petrov P. S., Ehrhardt M. Wide-angle mode parabolic equation with transparent boundary conditions and its applications in shallow water acoustics // DAYS on Diffraction. — 2019. — P. 221.

- A3. Petrov P. S., Tyshchenko A. G. A numerical method for estimating anthropogenic acoustic noise levels using wide-angle Mode parabolic equations // Days on Diffraction. — 2022. — P. 48.
- A4. Tyshchenko A. G., Petrov P. S., Ehrhardt M. Wide-angle mode parabolic equation with transparent boundary conditions and its applications in shallow water acoustics // PACON-219. — 2019.
- A5. Тыщенко А. Г., Петров П. С. Комплекс программ для расчета акустических полей в мелком море на основе метода широкоугольных модовых параболических уравнений // XXXIV сессия Российского акустического общества. — 2022. — С. 656.
- A6. Тыщенко А. Г., Козицкий С. Б., Петров П. С. Метод расчёта векторных акустических полей на основе модовых параболических уравнений // XXXV сессия Российского акустического общества. — 2023. — С. 275.
- A7. Тыщенко А. Г., Козицкий С. Б., Петров П. С. Метод расчёта векторных акустических полей на основе модовых параболических уравнений // X конференция молодых ученых «Океанологические исследования». — 2023. — С. 70.
- A8. Wide-angle mode parabolic equations for the modelling of horizontal refraction in underwater acoustics and their numerical solution on unbounded domains / P. S. Petrov, M. Ehrhardt, A. G. Tyshchenko, P. N. Petrov // Journal of Sound and Vibration. — 2020. — Vol. 484. — P. 115526.
- A9. Estimating Sound Exposure Levels Due to a Broadband Source over Large Areas of Shallow Sea / D. Manul'chev, A. Tyshchenko, M. Fershalov, P. Petrov // Journal of Marine Science and Engineering. — 2022. — Vol. 10, no. 1. — P. 82.

- A10. Современные методы расчета акустических полей в океане, основанные на их представлении в виде суперпозиции мод / А. Г. Тыщенко, С. Б. Козицкий, М. С. Казак, П. С. Петров // Акустический журнал. — 2023. — Июнь. — Т. 69, № 5. — С. 620—636.
- A11. Комплекс программ для расчета акустических полей в мелком море на основе метода широкоугольных модовых параболических уравнений / А. Г. Тыщенко, О. С. Заикин, М. А. Сорокин, П. С. Петров // Акустический журнал. — 2021. — Июнь. — Т. 67, № 5. — С. 533—541.
- A12. The solution of sound propagation modeling problems for environment impact assessment by the mode parabolic equations method / A. G. Tyshchenko, M. A. Sorokin, S. B. Kozitskiy, P. S. Petrov // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2024. — Ноябрь. — Т. 156, № 5. — С. 3306—3319.