Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева
Дальневосточного отделения Российской Академии наук

На правах рукописи

УДК 534.2

Тыщенко Андрей Геннадьевич

Численное моделирование распространения широкополосных акустических сигналов в мелком море с использованием модовых параболических уравнений

1.3.7 – Акустика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д.ф.-м.н.

Петров Павел Сергеевич

Владивосток – 2025

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования.

В настоящее время в акустике океана активно развиваются методы математического моделирования распространения звука в трёхмерных неоднородных волноводах и разрабатываются комплексы программ, основанные на данных методах.

Математическое описание таких эффектов как отражение, преломление, диффракция и рассеяние акустической энергии в трёхмерном пространстве, то есть одновременно в вертикальной и горизонтальной плоскостях, рассматриваются в литературе на протяжении нескольких десятилетий. Обзоры наиболее ранних работ представлены, например, в книге [1] и статье [2]. В дальнейшем были разработаны первые эффективные и достаточно точные методы численного моделирования распространения звука, например, основанные на трёхмерных параболических уравнениях [3, 4, 5]. Необходимость учитывать трёхмерные эффекты также была экспериментально подтверждена в ряде работ 1990-2005 гг. [2, 6, 7, 8].

Со временем также были разработаны идеализированные модельные задачи, отражающие характерные гидрологические, батиметрические и геологические (связанные со структурой слоёв дна) особенности, создающие различные трёхмерные эффекты [9, 10, 11]. Наиболее часто используемой является задача распространения звука в клиновидном прибрежном волноводе мелкого моря, которая на данный момент лежит в основе процесса валидации разрабатываемых методов и моделей [12, 13, 14, 15, 16]. Однако существуют и другие модельные задачи, фокусирующиеся на исследовании влияния формы и параметров волновода на распространение звука, например, волноводы, сформированные подводными каньонами, поперечные сечения которых имеют форму функции Гаусса [17, 13], а также искривлёнными фронтами внутренних волн [18]; волноводы, содержащие одиночные и двойные подводные возвышенности [15], шепчущие галереи, формируемые за счёт рефракции над чашеобразным дном [19]; волноводы с переменной скоростью звука [20].

Немаловажно также отметить работы, в которых исследование посвящёно трёхменым эффектам, возникающим в реальных волноводах, таких как различного рода явления, возникающие из-за соляных клинов в устьях рек и нелинейных внутренних волн в областях континентального шельфа, и влиянию батиметрии на трёхмерную фокусировку, расфокусировку и дифракцию акустических волн. Подобные эффекты были рассмотрены в речных устьях [21], озёрах [22], в каньоне Хадсона [23, 17], в Восточно-Китайском море [15], в областях с выраженными нелинейными внутренними волнами [24, 25], на материковых склонах [26], а также при рассеивании звука над Срединно-Атлантическим хребтом [27] и абиссальной равниной [28], и при распространении через скопления пузырьков, производимых горбатыми китами во время питания [29].

Большое внимание в литературе уделяется исследованию точности и применимости различных современных методов моделирования распространения и рассеяния звука в трёхмерных океанических волноводах. Например, методы конечных элементов были рассмотрены в работе [29], где они были применены для моделирования акустического давления в пузырьковых сетях, создаваемого вокализациями горбатых китов. Также, их точность была оценена при моделировании распространения в воде и дне сейсмоакустических волн, создаваемых землетрясениями [30]. Другая группа численных методов, основанных на методе параболического уравнения и впервые представленных в подводной акустике работами [31, 32], в дальнейшем была развита в таких работах как [33, 12, 13, 34], в которых особое внимание уделено перекрёстным членам, содержащим производные по глубине и угловой координате и возникающим из квадратного корня при формальной факторизации уравнения Гельмгольца. Также, в работе [34], описано использование вычислительной сетки, предназначенной для лучшей обработки граничных условий. Лучевая теория распространения звука была также применена для расчёта трёхмерных звуковых полей и была протестирована в ходе моделирования натурных экспериментов в Восточно-Китайском море в работе [15]. Улучшению качества моделирования распространения звука в задачах с реальными внутренними волнами посвящена работа [25], в рамках которой был разработан комбинированный метод моделирования, включающий нелинейную модель внутренних волн в региональную модель, основанную на реальных данных и учитывающую приливы и отливы. Также, в недавних работах внимание уделяется моделированию рассеяния, например, с использованием методов, основанных на явной численной схеме для решения интегрального уравнения Кирхгофа во временной области [35], методе кратковременных эквивалентных источников для задач широкополосного рассеяния [36], численном методе расчёта функции Грина для моделирования рассеяния на больших расстояниях, возникающего из-за объектов, расположенных на морском дне или погружённых в нём.

Некоторые методы, описанные в литературе, также имеют открытую программную реализацию. Так, например, программы BELLHOP3D [15] и TRACEO3D [37] реализуют метод моделирования распространения звука, основанный на трассировке лучей и гауссовых пучков. В KRAKEN3D [38] реализовано вычисление акустических полей в рамках модового разложения. Также, моделирование путём решения трёхмерных параболических уравнений реализовано в CAPRE3D [39].

Настоящая диссертация посвящена широкоугольным модовым параболическим уравнениям, которые известны уже достаточно давно, однако до сих пор не получили широкого распространения. Несмотря на это, использование таких уравнений представляется перспективным, так как в сравнении с узкоугольными параболическими уравнениями они позволяют получать более точные решения, при этом требуя лишь незначительного увеличения объёма вычислений. Так, самым трудоёмким этапом является решение акустической спектральной задачи, которое может быть выполнено заранее для изучаемой области, что значительно ускоряет процесс моделирования, так как само решение уравнения занимает существенно меньшее количество времени. В настоящей работе также предложено применение лучевых стартеров, которые являются более подходящими для решения широкоугольных параболически уравнений в сравнении с традиционно используемыми начальными условиями Гаусса и Грина.

Степень разработанности темы исследования.

Настоящая диссертация является законченным научным исследованием, в котором выполнены все шаги по разработке нового инструмента для моделирование акустических полей в волноводах мелкого моря: предложен алгоритм расчёта акустических полей, выполнена его программная реализация и её всесторонняя валидация на модельных задачах, а также реальных задачах оценки уровней звукового воздействия сейсморазведочных импульсов и сигналов, связанных с прохождением одиночного судна.

Цели и задачи диссертационной работы.

Целью настоящей диссертации является разработка эффективного метода моделирования распространения широкополосных акустических сигналов в трёхмерном волноводе мелкого моря и комплекса программ на основе этого метода, позволяющего решать широкий класс задач за разумное время.

В ходе работы на диссертацией были решены следующие задачи.

- Разработать эффективный метод численного решения широкоугольных параболических уравнений для моделирования поля точечного источника звука с возможностью искусственного ограничения расчётной области.

- Разработать комплекс программ на языке программирования C++, позволяющий выполнять моделирование распространения звука в волноводах, имеющих произвольную структуру, путём задания батиметрии, гидрологии и параметров слоёв дна.

- Выполнить всестороннюю валидацию комплекса программ путём решения серии модельных задач и его апробацию в ходе выполнения расчётов уровней антропогенных акустических сигналов в океане.

Научная новизна.

В работе имеются следующие элементы научной новизны

1. Разработан новый алгоритм численного решения начально-краевых задач для псевдодифференциальных модовых параболических уравнений с граничными условиями прозрачности и начальным условием моделирующим точечный всенаправленный источник колебаний.

2. Разработан новый комплекс программ на языке программирования C++, реализующий предложенный алгоритм численного решения, имеющий возможность указания параметров волновода с использованием конфигурационных файлов и размещённый в открытом доступе.

3. Впервые выполнены расчёты широкополосного акустического поля, обусловленного прохождением одиночного судна, на заданной акватории с учётом трёхмерного характера распространения звука в мелком море с неоднородным рельефом дна.

Теоретическая и практическая значимость.

В диссертации предложен метод моделирования распространения звука в волноводах мелкого моря с использованием модовых параболических уравнений. Предложенный метод реализован в виде комплекса программ на языке программирования C++ и рамещён в открытом доступе. Разработанная программа позволяет выполнять трёхмерное моделирование распространения звука, трассировку лучей, соответствующих вертикальным модам, вычисление временного ряда импульса звукового сигнала и уровня звукового воздействия. При этом параметры волновода, модели и вычислений задаются с использованием конфигурационного файла, что существенно упрощает проведение моделирования, сокращая время, затрачиваемое на подготовку вычислений. Также, при разработке комплекса программ, существенное внимание было уделено возможности её использования в качестве заголовочной библиотеки, таким образом реализованный метод решения параболического уравнения может быть интегрирован в другие программы на языке программирования C++.

Теоретическая значимость работы состоит в том, что разработанный комплекс программ позволил исследовать ряд физических эффектов, в частности важность учёта именно эффектов горизонтальной рефракции при моделировании распространения звука в клиновидном волноводе мелкого моря поперёк наклона клина.

Методология и методы исследования.

Алгоритм численного решения псведодифференциальных модовых параболических уравнений (ПДМПУ) является модификацией известного метода SSP (split-step Padé, метод расщепления Паде), к которому добавлены граничные условия прозрачности для искусственного ограничения расчётной области. При дискретизации дифференциального оператора по поперечной переменной в методе SSP использованы аппроксимации по методу конечных разностей. При задании начальных условий для ПДМПУ используется лучевое представление акустического поля на небольшом расстоянии от точечного источника.

Программная реализация алгоритмы была выполнена на языке программирования C++ с использованием стандарта языка C++20. При разработке особое внимание уделялось возможности использования реализации предложенных алгоритмов в качестве сторонней заголовочной библиотеки, путём широкого использования методов объектно-ориентированного и шаблонного программирования. Библиотека boost была использована для упрощения реализации интерфейса командной строки. Для вычисления дискретного преобразования Фурье использовалась библиотека fftw. Оптимизация операций, связанных с линейной алгеброй, была выполнена с применением библиотеки Eigen. Библиотека CAMBALA использовалась для вычисления модовых функций и соответствующих им волновых чисел. Автоматизация процесса сборки для разных платформ выполнена с использованием программного средства CMake.

Положения, выносимые на защиту.

1. Метод решения псевдодифференциальных модовых параболических уравнений с искусственным ограничением расчётной области путём постановки граничных условий прозрачности или добавления к ней согласованных поглощающих слоёв, а также с использованием лучевого стартера позволяет корректно моделировать распространение звука в трехмерных волноводах мелкого моря в адиабатическом приближении и обеспечивает высокую скорость расчетов благодаря использованию шагов сетки превышающих длину волны.

2. Комплекс программ AMPLE, основанный на данном алгоритме и разработанный на языке программирования C++, позволяет моделировать распространение тональных и импульсных сигналов в океане с возможностью учёта трехмерных неоднородностей дна, а также двумерного поля скорости звука и структуры слоёв дна.

3. Моделирование распространения сигналов, связанных с сейсморазведочными работами и судоходством, проведённое с использованием разработанного комплекса прикладных программ, позволяет добиться точности до 1 дБ при сравнении уровней звукового воздействия (SEL) с данными прямых измерений, а также позволяет адекватно воспроизвести при моделировании распределение энергии сигналов этих типов

по частотам.

4. При моделировании распространения звука в клиновидном прибрежном волноводе мелкого моря для акустических трасс, ориентированных вдоль изобат, допустимо пренебрежение межмодовым взаимодействием, а полный учёт горизонтальной рефракции за счёт широкоугольного модового параболического уравнения позволяет получить решение с высокой точностью.

Степень достоверности и апробация результатов.

Методы, описанные в работе, а также их программная реализация [40], были протестированы на множестве модельных задач и на экспериментах с использованием натурных данных, полученных с подводных акустических регистраторов. Достоверность результатов обусловливается хорошей их согласованностью с известными методами моделирования и результатами натурных измерений. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: на конференции «Days on Diffraction» (Санкт-Петербург, 2019 [41], дистанционно 2022 [42]), на конференции «PACON» (Владивосток, 2019 [43]) на сессиях Российского акустического общества (дистанционно 2022 [44], 2023 [45]), на конференции «Океанологические исследования» (Владивосток, 2023 [46]). Работа, которая легла в основу Главы 4 диссертации, была отмечена в качестве лучшей работы 2024 г в области акустики океана Научным советом РАН по акустике.

Публикации.

Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 5 в рецензируемых научных журналах [47, 48, 49, 50, 51], включённых в перечень ВАК, а также индексируемых в международных библиографических базах данных Scopus ("Скопус") и Web of Science ("Сеть науки").

Личный вклад автора.

Значительная часть результатов диссертации получена в работах автора, выполненных в соавторстве с научным руководителем Петровым П.С. и другими коллегами из ТОИ.

В Главе 2 автором были выведены граничные условия прозрачности для псевдодифференциальных модовых параболических уравнений, обеспечивающие отсутствие отражения волн на границах расчетной области. Также автором лично проведено тестирование в модельных задачах различных стартеров и установлено, что именно лучевой стартер позволяет полностью раскрыть потенциал метода SSP путем использования шагов по эволюционной переменной, превышающих длину волны.

В Главе 3 комплекс программ полностью разработан и реализован лично автором диссертации. Также лично автором проведено его тестирование в модельных задачах распространения узкополосных и широкополосных сигналов в океане. В частности, лично автором установлено, что при распространении звука вдоль изобат в клиновидном волноводе в дальнем поле взаимодействием мод можно полностью пренебречь, и интерференционная картина полностью определяется горизонтальной рефракцией звука.

В Главе 4 автором было лично выполнено моделирование акустического сигнала сухогруза, а также предложен алгоритм корректировки параметров дна для рассматриваемой акватории. Вклад автора в моделирование распространения сейсморазведочных импульсов состоит в программной реализации возможности учёта спектра сигнала в точке опорного измерения для оценки эффективного спектра в источнике.

Структура и объём диссертации.

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы.

Общий объём диссертации 160 страниц, из них 132 страницы текста, включая 38 рисунков и 11 таблиц. Список литературы включает 153 наименований на 21 страницах.

Благодарности.

Автор выражает неимоверную благодарность и признательность научному руководителю д.ф.-м.н. Петрову П.С. за возможность получить несоизмеримый опыт при работе над множеством задач, за многолетнее сотрудничество в научной работе, результатом которой стала настоящая диссертационная работа, а также поддержку в различных задачах и начинаниях. Автор также выражает благодарность коллективу лаборатории 3/2 за продуктивную и дружественную совместную работу.

Глава 1
Описание предметной области и обоснование постановки задачи

1.1 Оценка влияния антропогенных акустических сигналов

Моделирование трёхмерных звуковых полей применяется во многих областях исследования и освоения океана, требующих учёта множества параметров сложных неоднородных океанических волноводов.

С развитием промышленности все больше расширяется хозяйственная деятельность человека, связанная с добычей нефти, газа и разнообразных биоресурсов в акватории мирового океана, в результате которой создаётся огромное количество антропогенных шумов, которые негативно сказываются на морской фауне [52, 53]. Таким образом, возникает задача оценивания и минимизации шумового загрязнения и его воздействия на мировой океан. Существуют два подхода к решению этой задачи: проведение измерений и моделирование. В первом случае проводится некоторое количество замеров плотности звука в воде, по которым строится интерполяционная картина звукового поля. Недостатком такого метода является дороговизна и сложность проведения измерений, которые также фактически могут быть получены только в точках среды на сетке с очень большими шагами по координатам, поэтому такие данные чаще всего используются для корректировки и проверки точности модельных данных. В свою очередь моделирование требует данных о положении и характеристиках источника звука, а также данных о свойствах среды: батиметрии, гидрологии и структуре дна. Основным преимуществом моделирования является возможность вычисления звукового поля как и уже существующих источников, так и планируемых, что позволяет заранее минимизировать влияние человека на океан. Недостатком такого метода является необходимость сбора и обработки изменяющихся данных о состоянии среды, что само по себе является сложной задачей.

Мониторинг уровней акустической энергии, распределённой по большому морскому пространству, возникшей из антропогенных шумов, создаваемых в процессе различных индустриальных процессов на континентальном шельфе, является одной из областей, для которых применение трёхмерных моделей распространения звука является обязательным [54, 55, 56, 57, 58, 59, 60]. Действительно, не представляется возможным полностью покрыть интересуемое морское пространство приёмниками, поэтому несколько точечных опорных измерений должны быть использованы для восстановления звукового ландшафта морской среды. Также, зачастую требуется провести тщательное исследование звукового загрязнения морского пространства в реальном времени, чтобы в кратчайшие строки предоставить оценку его влияния на морскую фауну и принять подходящие меры смягчения последствий [54]. Такие требования накладывают существенные ограничения на производительность вычислительных программ для моделирования распространения звука. Например, в случае акустического мониторинга сейсмической разведки возникает задача моделирования широкополосного (10–250 Гц.) импульсного распространения в трёхмерной вычислительной области, представляющей собой морское пространство протягающееся на десятки километров в обоих горизонтальных направлениях [56, 61]. Многие существующие методы моделирования распространения звука не могут удовлетворить требованию того, что вычисления в данной области исследований должно проводиться почти в реальном времени. Например, известно, что использование современного высокоточного подхода, основанного на трёхмерных параболических уравнениях, требует 20 часов для вычисления акустического поля на частоте 25 Гц в эталонной задаче с подводным акустическим волноводом [62]. Таким образом, оказывается затруднительным полагаться на трёхмерные параболические уравнения для проведения моделирования широкополосных источников в разумные сроки.

1.2 Акустическая навигация

С каждым годом хозяйственная деятельность человека всё больше осуществляется с использованием автономных подводных аппаратов, требующих наличия стабильных систем навигации и связи, основанных на распространении звука, при этом привычные системы, основанные на электромагнитном излучении, неприменимы в подобных условиях [63, 64]. При разработке систем подводной акустической навигации возникает задача определения зон уверенного приёма и поиска взаимного расположения источников звукового сигнала таким образом, чтобы минимизировать зоны акустической тени. Также существует задача расчёта траекторий распространения звука на несущих частотах сигналов, с целью определения искривления по сравнению с геодезической на поверхности Земли для вычисления задержки звукового сигнала при осуществлении подводной навигации.

1.3 Акустические сигналы, создаваемые транспортными судами

В настоящее время эффективное и подходящее измерение шумов транспортных судов и оценка их влияния на окружающую среду является одной из актуальных проблем подводной акустики [65, 66, 67, 68, 69, 70]. Широко известно, что судоходство является одним из основных антропогенных источников шума, влияющего на морские экосистемы, особенно в прибрежных районах близких к крупным морским портам. Систематическая подверженность высокому уровню звукового воздействия может негативно сказываться на популяции различных видов морских млекопитающих, рыб и даже безпозвоночных, поэтому существенные исследования фокусируются на определении приемлемого порога этого взаимодействия [71, 72, 73]. С другой стороны шум, создаваемый транспортным судном, может быть источником информации о среде. Так, в [74, 70] судоходный шум используется в качестве источника для возможности проведения геоакустического обращения параметров дна. В [75] как спектр функции источника сухогруза, так и параметры морского дна были оценены с использованием статистического вычислительного метода, предполагающего, что судно может быть представлено в виде точечного источника, в то время как авторы [76] одновременно оценивают спектр функции источника сухогруза и параметры модели морского дна, используя метод Байесовского обращения и представления торговых судов в виде нескольких точечных источников.

В дополнение к прямым замерам, оценка распределения уровня шума в больших морских пространствах требует подходящих инструментов моделирования распространения звука. В последнее время для данной задачи были разработаны несколько классов вычислительных методов, основанных на различных математических подходах, включающих лучевую теорию, метод параболических уравнений [62, 77], метод потока энергии [78, 79] и модовые параболические уравнения [47, 80] (то есть вертикальные моды, объединённые с двумерными параболическими уравнениями для вычисления амплитуд модового разложения поля). Большинство этих методов были подвергнуты тщательной верификации в различных эталонных задачах, включающих некоторые упрощённые модели среды (например, в [47]) и монопольный (всенаправленный) точечный источник (в большинстве случаев тональный). Несмотря на впечатляющие вышеупомянутые успехи в разработке численных методов моделирования звукового поля в подводной акустике, достигнутые за последние 20 лет, до сих пор существует множество вопросов, возникающих из требований индустрии и реальных приложений, и относящихся к балансу эффективности и точности, а также корректному представлению различных источников шума в вычислительных моделях.

1.4 Обзор существующих методов решения

На данный момент существует несколько программных продуктов позволяющих получать численное решение уравнения Гельмгольца (1). BELLHOP [81] и Traceo3D [82], основанные на методе суммирования Гауссовых пучков и лучевой теории распространения звука соответственно. Недостатком этих методов является использование геометроакустического приближения, которое является недостаточно точным при моделировании источников звука, имеющих частоту менее 1 кГц. Лин из океанографического института в Вудс-Хоуле и Стюрм из центральной школы Лиона в последнее десятилетие разработали закрытые комплексы программ, основанные на решении трёхмерного параболического уравнения [83, 84, 77], однако решение таких уравнений требует запредельных затрат памяти и времени, вычисление решения даже самых простых задач занимает не менее суток.

1.5 Требования к модели и её программной реализации

Существующие на данный момент программные комплексы в основном сфокусированы на решении какой-то одной мелкой задачи, зачастую являющейся частью чего-то большего, или же направлены на решение какой-то одной конкретной задачи. Также, многие из них не позволяют выполнять вычисления за разумное время. Поэтому возникает необходимость в разработке новой модели, позволяющей выполнять оценку поля акустического давления в некотором спектре задач, не имея привязанности к определённым параметрам. Основными требованиями к программной реализации модели являются:

1. Реализация численных схем решения модовых параболических уравнений.

2. Моделирование звукового поля на трёхмерной сетке.

3. Возможность использования как готовых коэффициентов уравнения, так и коэффициентов, вычисленных с помощью пакета Cambala [85], с указанием необходимых параметров: плотности среды, батиметрии, гидрологии и др.

4. Проведение трассировки горизонтальных лучей, соответствующих вертикальным модам.

5. Вычисление временного ряда импульса звукового сигнала в произвольных точках среды.

6. Оценка уровня шума с использованием интегральной характеристики звукового воздействия.

7. Высокая скорость работы по сравнению с альтернативными методами моделирования.

Глава 2

Математические методы

Текущая глава посвящена описанию различных математических методов, предназначенных для моделирования распространения звука в волноводах мелкого моря, а также описанию различных задач, решение которых может быть выполнено с использованием разрабатываемой модели. Разделы 2.1 и 2.2 посвящены краткому описанию метода нормальных мод в акустике. В Разделе 2.3 рассматривается использование аппроксимации Паде [86, 87] для приближения оператора квадратного корня и пропагатора псевдодиффиренциального модового параболического уравнения, а затем в Разделе 2.4 рассматривается дискретизация дифференциального оператора по поперечной горизонтальной координате и приводится численная схема решения псевдодифферециального модового параболического уравнения. Далее представлены особенности его решения с использованием представленной численной схемы. В Разделе 2.5 рассматриваются два способа искусственного ошраничения вычислительной области: согласованные поглощающие слои и граничные условия прозрачности. Раздел 2.6 посвящён краткому описанию лучевой теории для уравнения горизонтальной рефракции, которая затем используется для постановки лучевых начальных условий в Разделе 2.7.2, моделирующих точечный источник. Последними в Разделах 2.8, 2.9 и 2.10 приводятся задачи, связанные с моделированием распространения звука: расчёт временных рядов в точках приёма, расчёт полей уровней звуковой экспозиции, колебательных скорости и ускорения.

2.1 Модовое представление звукового поля точечного источника

Звуковое поле $p(x, y, z)$ (где z обозначает глубину, а x, y — координаты горизонтальной плоскости), создаваемое точечным источником в трёхмерном волноводе мелкого моря, расположенным по координатам $x = y = 0$, $z = z_s$ и имеющего частоту f, описывается трёхмерным уравнением Гельмгольца [88]

$$\left(\rho(x, y, z) \nabla \left(\frac{1}{\rho(x, y, z)} \nabla\right) + K^2(x, y, z)\right) p(x, y, z) = -\delta(x)\, \delta(y)\, \delta(z - z_s)\ , \tag{1}$$

а также граничными условиями и условиями на границах раздела сред вида

$$p\Big|_{z=0} = 0\,, \tag{2}$$

$$p\Big|_{z=h_i^-} = p\Big|_{z=h_i^+}\,, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{z=h_i^-} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{z=h_i^+}\,, \tag{4}$$

$$p\Big|_{z=H} = 0 \tag{5}$$

где $\rho(x, y, z)$ — плотность среды, H – нижняя граница расчётной области, $\mathbf{n}$ — нормаль к границам разделов слоёв среды, $h_i, i = \overline{1, N_h}$ — глубины этих разделов. Коэффициент $K(x, y, z)$ представляет собой (комплексное) волновое число среды и определяется как

$$K(x, y, z) = \frac{\omega}{c(x, y, z)} \left(1 + i\eta\beta(x, y, z)\right)\ , \tag{6}$$

где $c(x, y, z)$ — скорость звука, $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота, $\beta(x, y, z)$ — коэффициент затухания звука, $\eta = {}^{1}\!/_{40\pi \log_{10} e}$. Для существования и единственности решения требуется также поставить условия излучения Свешникова [89, 90]

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}-i\sqrt{\frac{\omega}{c\,(r)}}\right)p_j\,(r)=0\,,\quad j=\overline{1,N_m}\,,\tag{7}$$

где $N_m = \left\lfloor \frac{\omega H}{\pi c_\infty}\right\rfloor$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, а $p_j\,(r)$ являются коэффициентами разложения решения $p\,(x,y,z)$ уравнения Гельмгольца по собственным функциям ϕ_j оператора Штурма-Лиувилля $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}+K^2\right)$ на бесконечности (при $r\mapsto\infty$), где волновод считается регулярным

$$p\,(x,y,z)=\sum_{j=1}^{\infty}p_j\,(r)\,\phi_j\,(z)\ .\tag{8}$$

Рассмотрим сначала задачу в горизонтально однородной среде (регулярном волноводе), то есть
$\rho\,(x,y,z)=\rho\,(z)$, $c\,(x,y,z)=c\,(z)$ и $\beta\,(x,y,z)=\beta\,(z)$. При этом также будем считать плотность среды $\rho\,(z)$ кусочно-постоянной функцией по слоям

$$\rho\,(z)=\begin{cases}\rho_0, & 0\leqslant z<h_1\\ \rho_i, & h_i<z<h_{i+1},\quad i=\overline{1,N_h-1},\\ \rho_{N_h}, & h_{N_h}<z\leqslant H\,.\end{cases}\tag{9}$$

Используя технику разделения переменных и представляя звуковое поле в виде

$$p\,(x,y,z)=A\,(x,y)\,\varphi\,(z)\ ,\tag{10}$$

при $x^2+y^2>0$ и $z\neq z_s$ уравнение (1) можно привести к виду

$$\frac{1}{A\,(x,y)}\left(\frac{\partial^2 A\,(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A\,(x,y)}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{\varphi\,(z)}\left(\frac{\mathrm{d}^2\varphi\,(z)}{\mathrm{d}z^2}+K\,(z)^2\,\varphi\,(z)\right)=0\,.\tag{11}$$

Вводя константу разложения k^2, уравнение (11) можно разложить на два для $A\left(x,y\right)$ и $\varphi\left(z\right)$ соответственно

$$\frac{\partial^2 A\left(x,y\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A\left(x,y\right)}{\partial y^2}-k^2 A\left(x,y\right)=0\,, \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi\left(z\right)}{\mathrm{d}z^2}+\left(K\left(z\right)^2-k^2\right)\varphi\left(z\right)=0\,. \tag{13}$$

Используя граничные условия для исходного уравнения Гельмгольца, можно выписать задачу Штурма-Лиувилля для (13)

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi\left(z\right)}{\mathrm{d}z^2}+K^2\left(z\right)\varphi\left(z\right)=k^2\varphi\left(z\right)\ ,\\ \varphi\Big|_{z=0}=0\,,\\ \varphi\Big|_{z=h_i^-}=\varphi\Big|_{z=h_i^+}\,,\\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=h_i^-}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=h_i^+}\,,\\ \varphi\Big|_{z=H}=0\,.\end{cases} \tag{14}$$

Такая задача имеет счётное множество решений $\varphi_j\left(z\right)$, которые называются модовыми функциями (или модами), с соответствующими им горизонтальными волновыми числами k_j. Такие решения обладают следующими свойствами

1. без учёта затухания ($\beta\left(z\right)\equiv 0$) все волновые числа являются вещественными, с учётом – комплексными,

2. без учёта затухания модовые функции образуют ортогональный базис в пространстве $L^2_\rho\left[0,H\right]$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ определённым формулой

$$\langle f,g\rangle_\rho=\int\limits_0^H\frac{f\left(z\right)g\left(z\right)}{\rho\left(z\right)}\mathrm{d}z\,, \tag{15}$$

3. функции $\varphi_j(z)$ имеют ровно $j+1$ корень на отрезке $[0, H]$,

4. имеет место неравенство

$$k_1^2 > k_2^2 > k_3^2 > \dots\,, \tag{16}$$

5. модовые функции ортогональны и нормированы

$$\int_0^H \frac{\varphi_i(z)\,\varphi_j(z)}{\rho(z)}\,\mathrm{dz} = \delta_{i,j}\,. \tag{17}$$

Так как изменение параметров среды по координатам x, y в задачах подводной акустики является существенно более медленным по сравнению с изменением по z, решение для неоднородной среды может быть получено путём рассмотрения модовых функций локально при фиксированных значениях x, y, то есть решение задачи (14) может быть получено отдельно в каждой точке x, y. Таким образом, звуковое поле $p(x, y, z)$ может быть представлено в виде модового разложения

$$p(x,y,z) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j(x,y)\,\varphi_j(z,x,y)\ , \tag{18}$$

при этом x, y в $\varphi_j(z,x,y)$ понимаются как параметры функции. С использованием этого разложения (1) преобразуется к следующему виду

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 A_j(x,y)}{\partial x^2}\varphi_j(z,x,y) + 2\frac{\partial A_j(x,y)}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j(z,x,y)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_j(z,x,y)}{\partial x^2}A_j(x,y) + \right.$$
$$\frac{\partial^2 A_j(x,y)}{\partial y^2}\varphi_j(z,x,y) + 2\frac{\partial A_j(x,y)}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j(z,x,y)}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_j(z,x,y)}{\partial y^2}A_j(x,y) +$$
$$\left. k_j^2(x,y)\,A_j(x,y)\,\varphi_j(z,x,y)\right) = -\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-z_s)\ . \tag{19}$$

Уравнение для одной моды j теперь может быть получено умножением в смысле скалярного произведения на $\varphi_j(z,x,y)$ (то есть применением оператора $\int\limits_0^H (\cdot)\, \frac{\varphi_j(z,x,y)}{\rho(x,y,z)} \mathrm{d}z$)

$$\frac{\partial^2 A_j(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_j(x,y)}{\partial y^2} + k_j^2(x,y) A_j(x,y) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{U}_{j,\ell} A_\ell(x,y) + 2\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{V}_{j,\ell} \frac{\partial A_\ell(x,y)}{\partial x} + 2\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{W}_{j,\ell} \frac{\partial A_\ell(x,y)}{\partial y} = - \delta(x)\,\delta(y)\,\varphi_j(z_s,x,y)\ , \quad (20)$$

где матрицы $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ определяются как

$$\mathcal{U}_{j,\ell} = \int\limits_0^H \left(\frac{\partial^2 \varphi_\ell(z,x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\ell(z,x,y)}{\partial y^2} \right) \frac{\varphi_j(z,x,y)}{\rho(x,y,z)} \mathrm{d}z\,, \quad (21)$$

$$\mathcal{V}_{j,\ell} = \int\limits_0^H \frac{\partial \varphi_\ell(z,x,y)}{\partial x} \frac{\varphi_j(z,x,y)}{\rho(x,y,z)} \mathrm{d}z\,, \quad (22)$$

$$\mathcal{V}_{j,\ell} = \int\limits_0^H \frac{\partial \varphi_\ell(z,x,y)}{\partial y} \frac{\varphi_j(z,x,y)}{\rho(x,y,z)} \mathrm{d}z\,. \quad (23)$$

Эти матрицы описывают межмодовое взаимодействие при распространении звука. Во многих классах задач этим взаимодействием можно пренебречь, что в результате приводит уравнение к следующему виду

$$\frac{\partial^2 A_j(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_j(x,y)}{\partial y^2} + k_j^2(x,y) A_j(x,y) = -\delta(x)\,\delta(y)\,\varphi_j(z_s,0,0)\ . \quad (24)$$

Такое уравнение принято называть уравнением горизонтальной рефракции. Для того, чтобы получить условия излучения, предположим также, что на некотором достаточно большом расстоянии r_{max} параметры среды становятся постоянными по горизонтальным координатам, то есть $k_j(r) = k_{j,\infty}$ при $r > r_{max}$. Тогда условия излучения (7) преобразуются к следующему виду [91]

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik_{j,\infty}\right) A_j \neq \infty\,. \tag{25}$$

В дальнейшем удовлетворение этому условию следует из построения модового параболического уравнения и численной схемы его решения: учёт только исходящих волн по x (см. 2.2) и подавление отражения по y (см. 2.5).

2.2 Модовые параболические уравнения

Для получения параболических аппроксимаций однородный аналог уравнения горизонтальной рефракции (24) представляется в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k_j^2\,(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k_j^2\,(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}\right) A_j\,(x,y) = 0\,, \tag{26}$$

и выделяется его решение, состоящее из волн, распространяющихся в положительном направлении оси x

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k_j^2\,(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}\right) A_j\,(x,y) = 0\,. \tag{27}$$

Вводя модовое опорное волновое число $k_{j,0}$ и выделяя главную осцилляцию из $A_j\,(x,y)$

$$A_j\,(x,y) = e^{ik_{j,0}x}\mathcal{A}_j\,(x,y)\;,$$

получим задачу Коши для псевдодифференциального модового параболического уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{A}_j\,(x,y)}{\partial x} = ik_{j,0}\left(\sqrt{1+L_j} - 1\right)\mathcal{A}_j\,(x,y)\;, \\ \mathcal{A}_j\,(0,y) = \mathcal{A}_{j,0}\,(y) \end{cases} \tag{28}$$

где

$$k_{j,0}^2 L_j = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_j^2 (x,y) - k_{j,0}^2 \, .$$

2.3 Аппроксимация Паде

Для решения уравнения (28) необходимо выполнить линеаризацию оператора квадратного корня с использованием аппроксимации Паде. Пусть есть некоторая функция $F(\lambda)$ тогда её аппроксимация может быть записана в виде

$$F(\lambda) \approx \mathcal{R}(F,l,m)(\lambda) \equiv \frac{P_{l,m}^F(\lambda)}{Q_{l,m}^F(\lambda)}, \tag{29}$$

где $P_{l,m}^F(\lambda), Q_{l,m}^F(\lambda)$ обозначают многочлены порядка l и m соответственно [88]. Коэффициенты многочленов могут быть получены приравниванием рациональной функции ${}^{P_{l,m}^F(\lambda)}/_{Q_{l,m}^F(\lambda)}$ к разложению в ряд Тейлора функции $F(\lambda)$, содержащей $l+m+1$ членов.

2.3.1 Аппроксимация оператора квадратного корня

Аппроксимация оператора квадратного корня может быть записана в виде

$$ik_{j,0}\left(\sqrt{1+L_j}-1\right) \approx \frac{P_{l,m}(L_j)}{Q_{l,m}(L_j)}, \tag{30}$$

тогда

$$\frac{\partial \mathcal{A}_j(x,y)}{\partial x} = \frac{P_{l,m}(L_j)}{Q_{l,m}(L_j)} \mathcal{A}_j(x,y) \ . \tag{31}$$

Используя дискретизацию Крэнка-Николсон [92] на равномерной сетке $x = nh$, $\mathcal{A}_j^n \sim \mathcal{A}_j(x_n, y)$, уравнение (31) в положительном направлении оси x можно записать виде

$$D_h^+ \mathcal{A}_j^n = \frac{P_{l,m}(L_j)}{Q_{l,m}(L_j)} \mathcal{A}_j^{n+1/2}, \tag{32}$$

где

$$D_h^+\mathcal{A}_j = \frac{\mathcal{A}_j^{n+1} - \mathcal{A}_j^n}{h}\,, \qquad\qquad \mathcal{A}_j^{n+1/2} = \frac{\mathcal{A}_j^{n+1} + \mathcal{A}_j^n}{2}\,.$$

Тогда, уравнение (32) может быть преобразовано к виду

$$\mathcal{A}_j^{n+1} = \frac{U_{l,m}\left(L_j\right)}{W_{l,m}\left(L_j\right)}\mathcal{A}_j^n\,, \tag{33}$$

где

$$\begin{aligned} U\left(L_j\right) &= -hP_{l,m}\left(L_j\right) - 2Q_{l,m}\left(L_j\right)\,, \\ W\left(L_j\right) &= \quad hP_{l,m}\left(L_j\right) - 2Q_{l,m}\left(L_j\right)\,, \end{aligned}$$

многочлены степени $p = \max\left(l, m\right)$. Положив $l \leqslant m$ и разложив отношение ${}^{U(L_j)}\!/_{W(L_j)}$ на простые дроби, получим

$$\mathcal{A}_j^{n+1} = \left(a_{l,m}^0 + \sum_{i=1}^{p} \frac{a_{l,m}^i}{1 + b_{l,m}^i L_j}\right)\mathcal{A}_j^n\,. \tag{34}$$

2.3.2 Метод аппроксимации Паде для пропагатора

Другой подход к решению (28) был независимо предложен Авиловым [86] и Коллинзом [87]. В его основе лежит смена порядка дискретизации и применения аппроксимации Паде. При достаточно маленьком интервале $\Delta x = h$ уравнение (28) может быть формально решено в виде

$$\mathcal{A}_j^{n+1} = e^{ik_{j,0}h\left(\sqrt{1+L_j}-1\right)}\mathcal{A}_j^n\,. \tag{35}$$

Затем, применяя аппроксимацию Паде для экспоненты в виде разложения на простые дроби аналогично аппроксимации квадратного корня

$$e^{ik_{j,0}h\left(\sqrt{1+L_j}-1\right)} \approx \frac{\tilde{U}_{l,m}\left(L_j\right)}{\tilde{W}_{l,m}\left(L_j\right)} = \tilde{a}^0_{l,m} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\tilde{a}^i_{l,m}}{1+\tilde{b}^i_{l,m}L_j}\,, \tag{36}$$

получим

$$\mathcal{A}_j^{n+1} = \left(\tilde{a}^0_{l,m} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\tilde{a}^i_{l,m}}{1+\tilde{b}^i_{l,m}L_j}\right)\mathcal{A}_j^n\,. \tag{37}$$

Очевидно, что полиномы $\tilde{U}\left(L_j\right), \tilde{W}\left(L_j\right)$ отличаются от $U(L_j)\,, W(L_j)$, также как и коэффициенты их разложения на простые дроби $\tilde{a}^i_{l,m}, \tilde{b}^i_{l,m}$ и $a^i_{l,m}, b^i_{l,m}$. Однако, в остальном уравнения (34) и (37) полностью идентичны. В дальнейшем символ $\tilde{(\cdot)}$ будет опущен, так как все рассматриваемые методы могут быть применены к обоим формам. В англоязычной литературе такой метод имеет название Split-step Padé.

2.3.3 Коэффициенты аппроксимации Паде

Пусть требуется вычислить аппроксимацию Паде некоторой функции $F(\lambda)$ в виде (29). Также, положим, что $l \leqslant m$, и будем искать разложение аппроксимации на простые дроби в виде

$$\frac{P^F_{l,m}\left(\lambda\right)}{Q^F_{l,m}\left(\lambda\right)} = \frac{{}^0\alpha^F_{l,m} + \sum\limits_{i=1}^{l} {}^i\alpha^F_{l,m}}{1 + \sum\limits_{i=1}^{m} {}^i\beta^F_{l,m}} = {}^0a^F_{l,m} + \sum_{i=1}^{m} \frac{{}^ia^F_{l,m}}{1+{}^ib^F_{l,m}\lambda}\,. \tag{38}$$

2.3.3.1 Вычисление коэффициентов полиномов

Пусть известно разложение функции $F(\lambda)$ в ряд Тейлора вида

$$F(\lambda) \approx T^F_{l+m}\left(\lambda\right) = c^F_0 + \sum_{i=1}^{l+m} c^F_i \lambda^n + o\left(\lambda^{l+m}\right)\,, \tag{39}$$

тогда

$$c_0^F + \sum_{i=1}^{l+m} c_i^F \lambda^n = \frac{{}^0\alpha_{l,m}^F + \sum\limits_{i=1}^{l} {}^i\alpha_{l,m}^F}{1 + \sum\limits_{i=1}^{m} {}^i\beta_{l,m}^F}\,. \tag{40}$$

Коэффициенты ${}^i\alpha_{l,m}^F$ и ${}^i\beta_{l,m}^F$ могут быть найдены из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{array}{ll}
{}^0\alpha_{l,m}^F = c_0^F\,, & 0 = c_{l+1}^F + \sum\limits_{i=1}^{\min(l+1,m)} {}^i\beta_{l,m}^F c_{l-i+1}^F\,, \\
{}^1\alpha_{l,m}^F = c_1^F + {}^1\beta_{l,m}^F c_0^F\,, & \\
{}^2\alpha_{l,m}^F = c_2^F + {}^1\beta_{l,m}^F c_1^F + {}^2\beta_{l,m}^F c_0^F\,, & 0 = c_{l+2}^F + \sum\limits_{i=1}^{\min(l+2,m)} {}^i\beta_{l,m}^F c_{l-i+2}^F\,, \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\
{}^l\alpha_{l,m}^F = c_l^F + \sum\limits_{i=1}^{l} {}^i\beta_{l,m}^F c_{l-i}^F\,, & 0 = c_{l+m}^F + \sum\limits_{i=1}^{m} {}^i\beta_{l,m}^F c_{l-i+m}^F\,.
\end{array} \tag{41}$$

Таким образом, ${}^i\alpha_{l,m}^F$ явно выражены через коэффициенты ${}^i\beta_{l,m}^F$, которые могут быть найдены из решения правой системы уравнений.

В большинстве случаев выбор $l = m$ достаточно точно приближает аппроксимируемую функцию, однако в некоторых случаях использование θ-комбинации [93, 94] аппроксимаций с порядками полиномов $l = m$ и $l = m - 1$ позволяет получить более точное решение. Пусть ${}^i\alpha_{m,m}^F, {}^i\beta_{m,m}^F$ и ${}^i\alpha_{m-1,m}^F, {}^i\beta_{m-1,m}^F$ коэффициенты соответствующих полиномов, тогда их θ-комбинация при $\theta \in [0, 1]$ может быть вычислена как

$$\begin{aligned}
{}^i_\theta\alpha_{m,m}^F &= \theta\, {}^i\alpha_{m,m}^F + (1-\theta)\, {}^i\alpha_{m-1,m}^F\,, \quad i = \overline{0, m-1}\,, \\
{}^m_\theta\alpha_{m,m}^F &= \theta\, {}^m\alpha_{m,m}^F\,, \\
{}^i_\theta\beta_{m,m}^F &= \theta\, {}^i\beta_{m,m}^F + (1-\theta)\, {}^i\beta_{m-1,m}^F\,, \quad i = \overline{1, m}\,.
\end{aligned} \tag{42}$$

2.3.3.2 Вычисление разложения на простые дроби

Пусть полиномы $P_{l,m}^F(\lambda), Q_{l,m}^F(\lambda)$ имеют только простые корни ${}^i p_{l,m}^F$ и ${}^i q_{l,m}^F$ соответственно, тогда разложение их частного на простые дроби методом Хэвисайда [95] может быть записано как

$$
\begin{gathered}
\frac{P_{l,m}^F(\lambda)}{Q_{l,m}^F(\lambda)} = {}^0 a_{l,m}^F + \sum_{i=1}^{m} \frac{{}^i a_{l,m}^F}{\lambda - {}^i q_{l,m}^F} = {}^0 a_{l,m}^F + \sum_{i=1}^{m} \frac{{}^i a_{l,m}^F}{1 + {}^i b_{l,m}^F \lambda}, \\
{}^i b_{l,m}^F = -\left({}^i q_{l,m}^F\right)^{-1}, \\
{}^i a_{l,m}^F = {}^i b_{l,m}^F \frac{\prod\limits_{j=1}^{l} {}^i q_{l,m}^F - {}^j p_{l,m}^F}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} {}^i q_{l,m}^F - {}^j q_{l,m}^F}, \\
{}^0 a_{l,m}^F = {}^0 \alpha_{l,m}^F - \sum_{i=1}^{m} {}^i a_{l,m}^F .
\end{gathered}
\tag{43}
$$

Полиномы $P_{l,m}^F(\lambda)$ и $Q_{l,m}^F(\lambda)$ в общем случае имеют комплексные коэффициенты, корни которых являются собственными значениями матрицы компаньона [96]

$$
\begin{pmatrix}
-\frac{a_m - 1}{a_m} & -\frac{a_m - 2}{a_m} & \cdots & -\frac{a_1}{a_m} & -\frac{a_0}{a_m} \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0
\end{pmatrix},
\tag{44}
$$

где a_i коэффициенты полинома.

2.3.3.3 Разложение в ряд Тейлора оператора квадратного корня и экспоненты

Коэффициенты разложения оператора квадратного корня $ik_{j,0}\left(\sqrt{1+L_j}-1\right)$ в ряд (39) могут быть выражены формулой

$$c_0 = 0\,, \quad c_p = ik_{j,0}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_p}{p!}, \quad p = \overline{1,n}\,, \tag{45}$$

где $(x)_p = \prod_{k=0}^{p-1}(x-k)$ – убывающий факториал.

Аналогично, коэффициенты разложения экспоненты $e^{ik_{j,0}h\left(\sqrt{1+L}-1\right)}$ могут быть получены из рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} &c_0 = 1\,,\\ &c_1 = \frac{ik_{j,0}h}{2}\,,\\ &c_p = \frac{\left(ik_{j,0}h\right)^2 c_{p-2} - \left(4p^2+6p+2\right)c_{p-1}}{4\,(p+1)\,(p+2)}\,, \quad p = \overline{2,n}\,. \end{aligned} \tag{46}$$

2.4 Дискретизация оператора L_j

Для дискретизации уравнения (34) на равномерной сетке $y_q = y_0 + q\delta$ с шагом $\Delta y = \delta$ используется стандартная конечно-разностная схема

$$D_\delta^2\mathcal{A}_j^{n+1} = \frac{\mathcal{A}_j^{n+1,q+1} - 2\mathcal{A}_j^{n+1,q} + \mathcal{A}_j^{n+1,q-1}}{\delta^2}\,, \quad q \in \mathbb{N}\,, \tag{47}$$

где $\mathcal{A}_j^{n,q} \sim \mathcal{A}_j\left(x_n, y_q\right)$. Таким образом, уравнение (34) преобразуется к виду

$$\mathcal{A}_j^{n+1,q} = \left(a_{l,m}^0 + \sum_{i=1}^{p}\frac{a_{l,m}^i}{1+b_{l,m}^i L_j^\delta}\right)\mathcal{A}_j^{n,q}\,, \quad q \in \mathbb{N}\,, \tag{48}$$

где $k_{j,0}^2 L_j^\delta = D_\delta^2 + k_j^2 - k_{j,0}^2$. Будем искать $\mathcal{A}_j^{n+1,q}$ в виде

$$\mathcal{A}_j^{n+1,q} = a_{l,m}^0 \mathcal{A}_j^{n,q} + \sum_{i=1}^{p} a_{l,m}^i \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q}\,, \tag{49}$$

тогда

$$a_{l,m}^0 \mathcal{A}_j^{n,q} + \sum_{i=1}^{p} a_{l,m}^i \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q} = \left(a_{l,m}^0 + \sum_{i=1}^{p} \frac{a_{l,m}^i}{1 + b_{l,m}^i L_j^\delta} \right) \mathcal{A}_j^{n,q}\,. \tag{50}$$

Приравнивая слагаемые при одинаковом i, получим набор выражений, из которых могут быть найдены значения вспомогательных функций $\mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q}$

$$\left(1 + b_{l,m}^i L_j^\delta\right) \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q} = \mathcal{A}_j^{n,q}\,, \quad i = \overline{1,p}\,. \tag{51}$$

Используя равенства (47) и $k_{j,0}^2 L_j^\delta = D_\delta^2 + k_j^2 - k_{j,0}^2$, получим

$$\underbrace{\frac{b_{l,m}^i}{k_{j,0}^2 \delta^2}}_{\alpha_{j,i}} \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q-1} + \underbrace{\left(1 + \frac{b_{l,m}^i}{k_{j,0}^2}\left(k_j^2 - k_{j,0}^2 - \frac{2}{\delta^2}\right)\right)}_{\beta_{j,i}} \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q} + \underbrace{\frac{b_{l,m}^i}{k_{j,0}^2 \delta^2}}_{\gamma_{j,i}} \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q+1} = \mathcal{A}_j^{n,q}\,. \tag{52}$$

Таким образом, коэффициенты $\mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q}$ могут быть легко найдены обращением матриц с диагоналями $\alpha_{j,i}, \beta_{j,i}, \gamma_{j,i}$ методом прогонки [97]. Уравнение (52) представляет собой численную схему решения уравнения (28).

2.5 Граничные условия

Одной из особенностей МПУ является то, что их решение всегда рассматривается в неограниченной области, в отличие от решения «обычных», или «вертикальных», параболических уравнений в подводной акустике, которое вычисляется в нескольких слоях, имеющих в качестве верхней границы поверхность океана и, как минимум в теории, некоторую границу на дне моря. Таким образом, искусственное ограничение вычислительной области является обязательным при численном решении МПУ. В рамках данной работы рассматривается два способа выполнения такого ограничения. В первом случае вычислительная область расширяется с обеих сторон с целью поглощения исходящих волн. Во втором, решение внутри области сопоставляется с решением, содержащим исходящие волны за её пределами, с использованием специальных искусственных граничных условий.

2.5.1 Согласованные поглощающие слои

Впервые метод согласованных поглощающих слоёв (perfectly matching layers, PML) для граничных условий был показан Беранже для уравнений Максвелла [98], а позднее Леви [99], Лу и Чжу [100] исследовали применимость этого метода для решения параболических уравнений. В основе PML лежит расширение вычислительной области с целью плавного поглощения волн исходящих из неё. Пусть требуется найти решение уравнения (28) в области $\Omega = [0, x_1] \times [y_0, y_1]$. Сформируем новую область $\overline{\Omega} = [0, x_1] \times [y_0 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon]$, расширив Ω на ε с обоих сторон вдоль оси y. Заменим оператор L_j в уравнении (28) оператором L_j^{PML}, определяемым как

$$k_{j,0}^2 L_j^{PML} = \frac{1}{1 + i\beta\,(y)} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{1 + i\beta\,(y)} \frac{\partial}{\partial y} + k_j^2 + k_{j,0}^2\,, \tag{53}$$

где $\beta\,(y)$ – некоторая гладкая функция, монотонно убывающая на интервале $[y_0 - \varepsilon, y_0)$, возрастающая на $(y_1, y_1 + \varepsilon]$, и $\beta\,(y) = 0$ при $y \in [y_0, y_1]$. Таким образом, оператор L_j^{PML} совпадает с оператором L_j внутри области Ω. На границах $y_0 - \varepsilon$, $y_1 + \varepsilon$ устанавливаются стандартные однородные условия Дирихле

$$\mathcal{A}_j\big|_{y=y_0-\varepsilon} = \mathcal{A}_j\big|_{y=y_1+\varepsilon} = 0\,. \tag{54}$$

Таким образом, применимость PML граничных условий зависит от значения параметра ε, который должен быть существенно большим, чтобы сгладить исходящие волны, и функции $\beta\,(y)$, которая в свою очередь должна существенно гладко достигать своего максимального значения при погружении в PML, так, при слишком быстром возрастании исходящие волны будут отражаться внутри поглощающего слоя.

В рамках данной работы была использована следующая функция $\beta(y)$

$$\beta(y) = \beta_0 \left(\frac{|y - y_b|}{\varepsilon} \right)^3 = \beta_0 \zeta^3 \equiv \beta(\zeta)\ , \quad \zeta \in [0, 1]\ , \tag{55}$$

где y_b – соответствующая граница области Ω, $\beta_0 \in \mathbb{R}_+$ – параметр масштаба.

2.5.1.1 Дискретизация оператора L_j^{PML}

Для дискретизации оператора L_j^{PML} на равномерной сетке $y_q = y_0 - \varepsilon + q\delta$ используется стандартная конечно-разностная схема для первой производной с половинным шагом

$$D^1_{\delta/2} F^q = \frac{F^{q+1/2} - F^{q-1/2}}{\delta}\,. \tag{56}$$

Таким образом, выражение (51) преобразуется к виду

$$\left(1 + b^i_{l,m}\, {}^q_\delta L_j^{PML}\right) \mathcal{B}^{n+1,q}_{j,i} = \mathcal{A}^{n,q}_j\,, \quad i = \overline{1, p}\,, \tag{57}$$

где

$$k^2_{j,0}\, {}^q_\delta L_j^{PML} = \frac{1}{1 + i\beta(y_q)} D^1_{q/2} \left(\frac{1}{1 + i\beta(y_q)} D^1_{q/2} \right) + k_j^2 - k^2_{j,0}\,. \tag{58}$$

Используя равенства (56) и (58), получим

$$\underbrace{\frac{b^i_{l,m}\mu_q\mu_{q-1/2}}{k_0^2\delta^2}}_{\tilde{\alpha}^q_{j,i}} \mathcal{B}^{n+1,q-1}_{j,i} + \underbrace{\left(1 + \frac{b^i_{l,m}}{k^2_{j,0}} \left(k_j^2 - k^2_{j,0} - \frac{\mu_q}{\delta^2}\left(\mu_{q-1/2} + \mu_{q+1/2}\right)\right)\right)}_{\tilde{\beta}^q_{j,i}} \mathcal{B}^{n+1,q}_{j,i} + \underbrace{\frac{b^i_{l,m}\mu_q\mu_{q+1/2}}{k_0^2\delta^2}}_{\tilde{\gamma}^q_{j,i}} \mathcal{B}^{n+1,q+1}_{j,i} = \mathcal{A}^{n,q}_j\,, \tag{59}$$

где $\mu_q = {}^1/_{(1+i\beta(y_q))}$. Так как оператор L_j^{PML} совпадает с оператором L_j внутри области Ω, значения вспомогательных функций $\mathcal{B}_{j,i}^{n,q}$ в расширенной области $\overline{\Omega}$ могут быть найдены обращением матриц методом прогонки [97] с диагоналями $\tilde{\alpha}_{j,i}^q, \tilde{\beta}_{j,i}^q, \tilde{\gamma}_{j,i}^q$ на интервалах $[y_0 - \varepsilon, y_0)$, $(y_1, y_1 + \varepsilon]$ и $\alpha_{j,i}, \beta_{j,i}, \gamma_{j,i}$ на отрезке $[y_0, y_1]$.

2.5.2 Граничные условия прозрачности

Граничные условия, позволяющие предотвратить отражение от произвольной границы называются прозрачными граничными условиями. Для узкоугольного параболического уравнения они были впервые получены в непрерывной форме Баскаковым и Поповым [101] и Маркусом [102]. В дальнейшем Попвым также были получены условия для широкоугольного параболического уравнения в самой простой форме. Полностью дискретные условия для узкоугольного параболического уравнения пригодные для использования в численном моделировании были получены Арнольдом и Эрхардтом [103, 104], и в дальнейшем были расширены на случай широкоугольных параболических уравнений [105].

Рассмотрим уравнения (51) и, учитывая, что $k_{j,0}^2 L_j^\delta = D_\delta^2 + k_j^2 - k_{j,0}^2$, получим

$$k_{j,0}^2 \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q} + b_{l,m}^i D_\delta^2 \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q} + b_{l,m}^i \left(k_j^2 - k_{j,0}^2\right) \mathcal{B}_{j,i}^{n+1,q} = k_{j,0}^2 \mathcal{A}_j^{n,q} \,. \tag{60}$$

Решение такой системы может быть найдено с использованием $\mathcal{Z}$-преобразования (см. Главу 2.5.2.1) по эволюционной координате x

$$\mathcal{Z}\left\{\mathcal{A}_j^{n,q}\right\} = \hat{\mathcal{A}}_j^q(\zeta) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n} \mathcal{A}_j^{n,q} \,, \quad \zeta \in \mathbb{C} \,, \quad |\zeta| > R_{\hat{\mathcal{A}}_j^q} \,, \tag{61}$$

где $R_{\hat{\mathcal{A}}_j^q}$ – радиус сходимости ряда Лорана. Применив это преобразование к

(60) и дополнительно потребовав $\mathcal{A}_j^{n,q} = \mathcal{B}_j^{n,q} = 0, \forall n < 0$, получим

$$-\zeta b_{l,m}^i D_\delta^2 \hat{\mathcal{B}}_{j,i}^q = \zeta k_{j,0}^2 \hat{\mathcal{B}}_{j,i}^q + \zeta b_{l,m}^i \left(k_j^2 - k_{j,0}^2\right) \hat{\mathcal{B}}_{j,i}^q - k_{j,0}^2 \hat{\mathcal{A}}_j^q \,. \tag{62}$$

Обозначим $\hat{\mathbf{\Psi}}_j^q = \left(\hat{\mathcal{A}}_j^q, \hat{\mathcal{B}}_{j,1}^q, \dots, \hat{\mathcal{B}}_{j,p}^q\right)^T \in \mathbb{C}^{p+1}$, добавим к системе $\mathcal{Z}$-преобразование уравнения (49)

$$\zeta \hat{\mathcal{A}}_j^q = a_{l,m}^0 \hat{\mathcal{A}}_j^q + \zeta \sum_{i=1}^{p} a_{l,m}^i \hat{\mathcal{B}}_{j,i}^q \,, \tag{63}$$

и запишем полученную систему в матричном виде

$$\mathbf{X}_j D_\delta^2 \hat{\mathbf{\Psi}}_j^q = \mathbf{Y}_j \hat{\mathbf{\Psi}}_j^q \,, \tag{64}$$

где $\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j$ – комплекснозначные $(p+1) \times (p+1)$ матрицы вида

$$\mathbf{X}_j := \begin{pmatrix} 0 & -\zeta b_{l,m}^1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & -\zeta b_{l,m}^p \\ \zeta & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} , \tag{65}$$

и

$$\mathbf{Y}_j := \begin{pmatrix} -k_{j,0}^2 & \zeta k_{j,0}^2 + \zeta b_{l,m}^1 \left(k_j^2 - k_{j,0}^2\right) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -k_{j,0}^2 & & & \zeta k_{j,0}^2 + \zeta b_{l,m}^p \left(k_j^2 - k_{j,0}^2\right) \\ a_{l,m}^0 & \zeta a_{l,m}^1 & \dots & \zeta a_{l,m}^p \end{pmatrix} . \tag{66}$$

Введём новую переменную $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j^q := D_q^- \hat{\mathbf{\Psi}}_j^q$ и запишем систему (64) в виде системы $2\,(p+1)$ дифференциальных уравнений первого порядка

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{X}_j \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I}\delta \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_j} D_\delta^+ \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{\Psi}}_j^q \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^q \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_j} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{\Psi}}_j^q \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^q \end{pmatrix}, \tag{67}$$

где $D_q^- \hat{\mathbf{\Psi}}_j^q = \frac{\hat{\mathbf{\Psi}}_j^q - \hat{\mathbf{\Psi}}_j^{q-1}}{\delta}$ и $D_q^+ \hat{\mathbf{\Psi}} = \frac{\hat{\mathbf{\Psi}}_j^{q+1} - \hat{\mathbf{\Psi}}_j^q}{\delta}$ – конечные разности назад и вперёд соответственно. Решение этой системы может быть записано в следующем виде

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{\Psi}}_j^{q+1} \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{q+1} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{B}_j + \mathbf{I}\right) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{\Psi}}_j^q \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^q \end{pmatrix}. \tag{68}$$

Запишем Жорданову форму матрицы $\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{B}_j + \mathbf{I}$

$$\mathbf{J}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_j^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_j^2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_j \left(\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{B}_j + \mathbf{I}\right) \mathbf{P}_j^{-1}, \tag{69}$$

где $\mathbf{J}_j^1, \mathbf{J}_j^2 \in \mathbb{C}^{(p+1)\times(p+1)}$ – матрицы, содержащие Жордановы блоки, соответствующие решениям, затухающим и возрастающим при $q \to \infty$ соответственно, и $\mathbf{P}_j^{-1}$ – матрица левых собственных векторов вида

$$\mathbf{P}_j^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_j^1 & \mathbf{P}_j^2 \\ \mathbf{P}_j^3 & \mathbf{P}_j^4 \end{pmatrix}. \tag{70}$$

Тогда справедливо разложение решения по базису $\mathbf{P}_j^{-1}$

$$\mathbf{P}_j^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{\Psi}}_j^{q+1} \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{q+1} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_j^{-1} \left(\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{B}_j + \mathbf{I}\right) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{\Psi}}_j^q \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^q \end{pmatrix} =$$
$$\mathbf{P}_j^{-1}\mathbf{P}_j \begin{pmatrix} \mathbf{J}_j^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_j^1 & \mathbf{P}_j^2 \\ \mathbf{P}_j^3 & \mathbf{P}_j^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{\Psi}}_j^q \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_j^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_j^1 \hat{\mathbf{\Psi}}_j^q + \mathbf{P}_j^2 \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^q \\ \mathbf{P}_j^3 \hat{\mathbf{\Psi}}_j^q + \mathbf{P}_j^4 \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^q \end{pmatrix}. \tag{71}$$

Требуя равенства нулю выражения, соответствующего решениям, возрастающим при $q \to \infty$, получим преобразованные прозрачные граничные условия на правой границе области при $q = Q$

$$\mathbf{P}_j^3 \hat{\mathbf{\Psi}}_j^Q + \mathbf{P}_j^4 \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^Q = 0\,. \tag{72}$$

Таким образом, $\mathcal{Z}$-преобразованные правые прозрачные граничные условия с невырожденной матрицей $\mathbf{P}_j^4$ могут быть записаны в конечно-разностной форме

$$D_\delta^- \hat{\mathbf{\Psi}}_j^Q = \hat{\mathbf{D}}_j \hat{\mathbf{\Psi}}_j^Q\,, \tag{73}$$

где $\hat{\mathbf{D}}_j = -\left(\mathbf{P}_j^4\right)^{-1} \mathbf{P}_j^3$. Применяя обратное $\mathcal{Z}$-преобразование [106] получим дискретные правые прозрачные граничные условия

$$\mathbf{\Psi}_j^{n+1,Q} - \mathbf{\Psi}_j^{n+1,Q-1} = \sum_{l=1}^{n+1} \mathbf{D}_j^{n+1-l} \mathbf{\Psi}_j^{l,Q}\,, \tag{74}$$

для вектора $\mathbf{\Psi}_j^{n,q} = \left(\mathcal{A}_j^{n,q}, \mathcal{B}_{j,1}^{n,q}, \ldots, \mathcal{B}_{j,1}^{n,q}\right)^T \in \mathbb{C}^{p+1}$, при этом коэффициенты $\mathbf{D}_j^n$ разложения могут быть получены из интегральной формулы Коши

$$\mathbf{D}_j^n = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\hat{\mathbf{D}}_j\left(\zeta\right)\right\} = \frac{\tau^n}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \hat{\mathbf{D}}_j\left(\tau e^{i\phi}\right) e^{in\phi} \mathrm{d}\phi\,, \quad n \in \mathbb{Z}_0\,, \quad \tau > 0\,. \tag{75}$$

Граничные условия на левой границе области при $q = 0$ могут быть получены аналогично из требования равенства нулю выражения, соответствующего решениям, затухающим при $q \to \infty$, то есть возрастающим при $q \to -\infty$

$$\mathbf{P}_j^1 \hat{\mathbf{\Psi}}_j^0 + \mathbf{P}_j^2 \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^0 = 0\,. \tag{76}$$

2.5.2.1 $\mathcal{Z}$-преобразование

Под $\mathcal{Z}$-преобразованием [106] понимается свёртывание некоторой последовательности вещественных чисел во временной области в аналитическую функцию комплексной частоты. одностороннее $\mathcal{Z}$-преобразование последовательности x_n при $n \geq 0$ задаётся как

$$X\left(z\right) = \mathcal{Z}\left\{x_n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \,. \tag{77}$$

При этом соответствующее ему обратное преобразование может быть выражено как

$$x_n = \mathcal{Z}\left\{X\left(z\right)\right\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X\left(z\right) z^{n-1} \mathrm{d}z \,, \tag{78}$$

где C – контур, охватывающий область сходимости $X\left(z\right)$

$$D = \left\{ z \middle| \lim_{m \mapsto \infty} \sum_{n=0}^{m} x_n z^{-n} < \infty \right\} \,. \tag{79}$$

Основными свойствами $\mathcal{Z}$-преобразования для области подводной акустики являются

1. Линейность:

$$\mathcal{Z}\left\{\alpha x_n + \beta y_n\right\} = \alpha \mathcal{Z}\left\{x_n\right\} + \beta \mathcal{Z}\left\{y_n\right\} \,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{80a}$$

2. Задержка по времени

$$\mathcal{Z}\left\{x_{n-k}\right\} = z^{-k} \mathcal{Z}\left\{x_n\right\}\left(z\right) \,, \quad k > 0, x_n = 0 \forall n < 0 \,. \tag{80b}$$

Дополнительно $\mathcal{Z}$-преобразование принято считать дискретным аналогом преобразования Лапласа

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int\limits_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} \mathrm{d}t\,. \tag{81}$$

При работе с дифференциальными уравнениями в частных производных преобразование Лапласа позволяет перейти к уравнению без частной производной по времени (или другой маршевой переменной). Являясь дискретным аналогом преобразования Лапласа, $\mathcal{Z}$-преобразование позволяет перейти к дискретному уравнению без численного дифференцирования по временной переменной.

2.6 Лучевая теория для уравнения горизонтальной рефракции

Предполагая, что волновые числа $k_j(x,y)$ являются медленно изменяющейся функцией, решение уравнения (24) с использованием лучевой теории распространения звука может быть выражено в виде

$$A_j(x,y) = M_j(x,y)\, e^{ik_{j,0} S_j(x,y)} + o\left({}^{1}\!/_{k_{j,0}}\right)\,, \tag{82}$$

где функция $S_j(x,y)$ называется эйконалом и может быть найдена из уравнения Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S_j(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_j(x,y)}{\partial y}\right)^2 = n_j(x,y)\,, \tag{83}$$

где $n_j(x,y) \equiv {}^{k_j(x,y)}\!/_{k_{j,0}}$ — индекс горизонтальной рефракции [107]. Амплитуда $M_j(x,y)$ может быть получена из уравнения переноса вида

$$2\left(\frac{\partial S_j(x,y)}{\partial x}\frac{\partial M_j(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial S_j(x,y)}{\partial y}\frac{\partial M_j(x,y)}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 S_j(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S_j(x,y)}{\partial y^2}\right)M_j(x,y)=0\,. \quad (84)$$

Решение этих уравнений связано с решением системы Гамильтона

$$\begin{array}{ll} \dfrac{dx_j(l)}{dl}=\dfrac{\xi_j(l)}{n_j(x_j,y_j)}\,, & \dfrac{d\xi_j(l)}{dl}=\dfrac{\partial n_j(x_j,y_j)}{\partial x_j}\,, \\ \dfrac{dy_j(l)}{dl}=\dfrac{\eta_j(l)}{n_j(x_j,y_j)}\,, & \dfrac{d\eta_j(l)}{dl}=\dfrac{\partial n_j(x_j,y_j)}{\partial y_j}\,, \end{array} \quad (85)$$

где l является натуральным параметром, обозначающим длину кривой вдоль траектории распространения луча, а ξ, η сопряжённые переменные к x, y — момент. Проекции решений этой системы из фазового пространства (x, y, ξ, η) на координатное (x, y) называются горизонтальными лучами, соответствующими вертикальным модам в океаническом волноводе.

2.6.1 Трассировка лучей, соответствующих вертикальным модам

2.6.1.1 Математическая постановка задачи

Задача трассировки лучей состоит в том, чтобы в области $\{(x, y, z_s)\, 0 \leqslant x \leqslant x_1, y_0 \leqslant y \leqslant y_1\}$ вычислить координаты распространения лучей, соответствующих вертикальным модам, из источника, имеющего координаты $(0, y_s, z_s)$, под углами распространения $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ и значениях натурального параметра кривой $l_0 \leqslant l \leqslant l_1$, задаваемые Гамильтовой системой задач Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j(l)}{dl} = \dfrac{\xi_j(l)}{n_j(x_j, y_j)}, \\ x_j(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_j(l)}{dl} = \dfrac{\partial n_j(x_j, y_j)}{\partial x_j}, \\ \xi_j(0) = \cos\alpha, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_j(l)}{dl} = \dfrac{\eta_j(l)}{n_j(x_j, y_j)}, \\ y_j(0) = y_s, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\eta_j(l)}{dl} = \dfrac{\partial n_j(x_j, y_j)}{\partial y_j}, \\ \eta_j(0) = \sin\alpha. \end{cases} \tag{86}$$

Каждое уравнение системы представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение, численное решение которых может быть выполнено с использованием методов Рунге-Кутты, описанных в следующей главе.

2.6.1.2 Явные методы Рунге-Кутты

Явные методы Рунге-Кутты являются семейством численных методов для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'_x(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}(x)), \\ \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases} \tag{87}$$

где $\boldsymbol{y} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ — искомая функция, $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ — функция зависимости, $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ — начальное значение функции, $x, x_0 \in \mathbb{R}$ — аргумент и его начальное значение.

Пусть задана некоторая равномерная дискретная сетка $\Omega = \left\{(x_i, \boldsymbol{y}_i) \middle| x_i = x_{i-1} + h_i, \boldsymbol{y}_i \approx \boldsymbol{y}(x_i), x_i, h_i \in \mathbb{R}, \boldsymbol{y}_i \in \mathbb{R}^n\right\}$, тогда явный s-шаговый метод Рунге-Кутты может быть записан в виде

$$\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + h_i \sum_{j=1}^{s} b_j \boldsymbol{k}_j \tag{88}$$

где $\boldsymbol{k}_j$ значения функции $\boldsymbol{f}$, вычисленные в специальных промежуточных точках интервала

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{k_1} = \boldsymbol{f}\left(x_i, \boldsymbol{y}_i\right)\ , \\
&\boldsymbol{k_2} = \boldsymbol{f}\left(x_i + c_2 h_i, \boldsymbol{y}_i + a_{2,1} h_i \boldsymbol{k}_1\right)\ , \\
&\dots \\
&\boldsymbol{k_s} = \boldsymbol{f}\left(x_i + c_s h_i, \boldsymbol{y}_i + a_{s,1} h_i \boldsymbol{k}_1 + a_{s,2} h_i \boldsymbol{k}_2 + \dots + a_{s,s-1} h_i \boldsymbol{k}_{s-1}\right)
\end{aligned}
\tag{89}
$$

или в общем виде

$$
\boldsymbol{k}_j = \boldsymbol{f}\left(x_i + c_j h_i, \boldsymbol{y}_i + h_i \sum_{t=1}^{j-1} a_{j,t} \boldsymbol{k}_t\right)\ , \qquad j = \overline{1, s}\,. \tag{90}
$$

Конкретный метод порядка p задаётся коэффициентами $a_{j,t}, b_j, c_j \in \mathbb{R}$, часто записываемыми в виде таблицы

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{2,1} & & & & \\
c_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
c_s & a_{s,1} & a_{s,2} & \dots & a_{s,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
\tag{91}
$$

и удовлетворяют условиям

$$
\sum_{t=1}^{j-1} a_{j,t} = c_j\,, \qquad j = \overline{1, s}\,, \tag{92}
$$

$$
\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}\left(x_i\right) = O\left(h_i^{p+1}\right)\ . \tag{93}
$$

2.6.1.3 Плотная выдача

При уменьшении шага сетки использование методов Рунге-Кутты становится менее эффективными или невозможным из-за необходимости вычислять промежуточные значения функции $\boldsymbol{f}$. Одним из вариантов ускорения процесса вычислений является так называемая плотная выдача, позволяющая вычислять значения $\boldsymbol{y}(x_i + \theta h_i)$ на всём отрезке $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, при этом в худшем случае используя лишь незначительное по сравнению с основным методом количество вычислений функции $\boldsymbol{f}$. Метод $s^\star$-шаговой плотной выдачи может быть в общем виде записан как

$$\boldsymbol{u}_i(\theta) = \boldsymbol{y}_i + h_i \sum_{j=1}^{s^\star} q_j(\theta)\, \boldsymbol{k}_j\,, \tag{94}$$

где

$$\boldsymbol{k}_j = \boldsymbol{f}\left(x_i + c_j h_i, y_i + h_i \sum_{t=1}^{j-1} a_{j,t} \boldsymbol{k}_t\right), \qquad j = \overline{1, s^\star}\,, \tag{95}$$

при этом $s^\star \geqslant s$, а зачастую $s^\star \geqslant s+1$, так как значение $\boldsymbol{k}_{s+1} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i} + h_i, \boldsymbol{y}_{i+1})$ может быть получено с вычислением следующего шага метода при $a_{s+1,t} = b_t\,, t = \overline{1, s}$. Порядок $p^\star$ плотной выдачи определяется количеством шагов $s^\star$ и видом полиномов $q_j(\theta)$ и задаётся условием

$$\boldsymbol{u}_i(\theta) - \boldsymbol{y}(x_i + \theta h_i) = O\left(h_i^{p^\star - 1}\right). \tag{96}$$

Было показано, что с использованием следующего представления полиномов $q_j(\theta)$

$$q_j(\theta) = \sum_{l=1}^{p^\star} q_{j,l} \theta^l \tag{97}$$

порядок $p^\star$ может быть достигнут увеличением количества шагов $s^\star$ [108]. Таким образом непрерывный явный метод Рунге-Кутты может быть задан двумя таблицами

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
0 & & & & & & & & \\
c_2 & a_{2,1} & & & & & & & \\
c_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\
c_s & a_{s,1} & a_{s,2} & \ldots & a_{s,s-1} & & & & \\
\hline
1 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{s-1} & b_s & & & \\
\hline
c_{s+2} & a_{s+2,1} & a_{s+3,2} & \ldots & a_{s-1} & a_s & a_{s+1} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
c_{s^\star} & a_{s^\star,1} & a_{s^\star,2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_{s^\star,s^\star-1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
q_{1,1} & q_{1,2} & \ldots & q_{1,p^\star} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
q_{s^\star,1} & q_{s^\star,2} & \ldots & q_{s^\star,p^\star}
\end{array}
\tag{98}
$$

2.6.1.4 Автоматический контроль шага сетки

Методы Рунге-Кутты также позволяют производить автоматический контроль шага с целью оптимизации вычислений и гарантированного поддержания заданной ошибки [108]. Для этого задаются дополнительные коэффициенты $\hat{b}_j, j = \overline{1, j}$, соответствующие тем же коэффициентам $a_{j,t}$ и c_j, обеспечивающие точность $\hat{p}$. На каждом шаге помимо $\boldsymbol{y}_{i+1}$ также вычисляется $\hat{\boldsymbol{y}}_{i+1}$ и производится оценка ошибки

$$
err = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{y_{i+1,l} - \hat{y}_{y+1,l}}{Atol + \max\left(\left|y_{i,l}\right|, \left|y_{y+1,l}\right|\right) \cdot Rtol}\right)^2} \tag{99}
$$

с последующим обновлением шага сетки

$$
\hat{h} = h_i \cdot \left({}^{1}\!/_{err}\right)^{{}^{1}\!/_{q+1}} \tag{100}
$$

где $q = \min\left(p, \hat{p}\right)$. Для увеличения вероятности принятия нового шага на следующем этапе вычислений вводится коэффициент fac, который часто выбирается как $fac = 0.8\,, 0.9\,, (0.25)^{1/q+1}\,, (0.38)^{1/q+1}$. Также для увеличения стабильности вводятся коэффициенты $facmax$ и $facmin$, ограничивающие скорость изменения размера шага. Таким образом,

$$\hat{h} = h_i \cdot \min\left(facmax, \max\left(facmin, fac\cdot\left(1/err\right)^{1/q+1}\right)\right),. \tag{101}$$

Затем, если $err \leqslant 1$ новый шаг сетки принимается и продолжается вычисление решения уравнения с шагом $h_{i+1} = \hat{h}$. Иначе новый шаг отвергается и вычисления производятся заново при $h_i = \hat{h}$.

2.7 Начальные условия

2.7.1 Начальные условия Гаусса и Грина

От выбора начальных условий зависит устойчивость получаемого численного решения. Для параболических уравнений наиболее часто используется начальное условие Гаусса [88]

$$\mathcal{A}_j\left(0,y\right) = \frac{\varphi_j\left(z_s\right)}{2\sqrt{\pi}} e^{-k_{j,0}^2\left(y-y_s\right)}\,. \tag{102}$$

Однако такое условие создаёт большой численный шум при использовании даже небольшого порядка аппроксимации квадратного корня. Также может быть использовано начальное условие Грина

$$\mathcal{A}_j\left(0,y\right) = \frac{\varphi_j\left(z_s\right)}{2\sqrt{\pi}}\left(1.4467 - 0.8402k_{j,0}^2\left(y-y_s\right)^2\right)e^{-\frac{k_{j,0}^2\left(y-y_s\right)^2}{1.5256}}\,, \tag{103}$$

которое обеспечивают большую, но всё ещё не идеальную стабильность.

2.7.2 Лучевые начальные условия

Для использования высоких порядков аппроксимации Паде необходимо начальное условие, учитывающее широкоугольные особенности решаемого уравнения. Такое условие может быть получено с использованием лучевой теории распространения звука. Предположим, что при $0 \leqslant x \leqslant x_0$, где x_0 сравнимо с длинной волны, свойства среды не зависят от x, то есть $k_j = k_j(y)$. Тогда, решение (28) может быть записано в виде

$$\mathcal{A}_j(x_0, y) = M_j(x_0, y)\, e^{ik_{j,0}S_j(x_0,y)} + o\left({}^1/_{k_{j,0}}\right) , \tag{104}$$

где $M_j(x, y)$ — амплитуда нулевого порядка, удовлетворяющая уравнению переноса (84), $S_j(x, y)$ — функция эйконала, удовлетворяющая уравнению Гамильтона-Якоби (83). Оба эти уравнения могут быть получены из решения системы Гамильтона (85) вдоль кривой распространения звукового луча в виде

$$S_j(y(l, \alpha)) = \int_0^l n_j(y(\ell, \alpha))\, d\ell\,, \tag{105}$$

$$M_j(y(l, \alpha)) = \frac{M_{j,0}}{n_j(y(l, \alpha))}\sqrt{\frac{\cos\alpha}{{}^{\partial y(l,\alpha)}/_{\partial\alpha}}}\,, \tag{106}$$

где $M_{j,0} = {}^{e^{i\pi/4}}/_{\sqrt{8\pi k_{j,0}}}$ — амплитуда на расстоянии 1 м. от источника, $n_j(l) = {}^{k_j(l)}/_{k_{j,0}}$ – горизонтальный показатель преломления.

Так как значения функций $S_j(x_0, y)$ и $M_j(x_0, y)$ вычисляются лишь на небольшом расстоянии x_0 (несколько десятков метров), в большинстве случаев будет достаточно начального условия рассчитанного для однородной среды при $k_j(x,y) \equiv k_{j,0}$. В таком случае получим

$$\begin{aligned} S_j(y) &= r(y) \ , \\ M_j(y) &= \frac{M_{j,0}}{r(y)} \, , \\ r(y) &= \sqrt{x_0^2 + y^2} \, . \end{aligned} \tag{107}$$

2.8 Расчёт временных рядов в точках приёма при распространении импульсных акустических сигналов

2.8.1 Математическая постановка задачи

Задача состоит в вычислении в точках приёма $R = \{(x,y,z) \in \Omega\}$ области $\Omega = \left\{(x,y,z) \middle| x_0 \leqslant x \leqslant x_1, y_0 \leqslant y \leqslant y_1, 0 \leqslant z \leqslant z_b\right\}$ временного ряда импульса сигнала в источнике $S = (x_0, y_s, z_s)$, задаваемого функцией $g(t)\ , t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Импульс $I_r(t)$ в приёмнике r в спектральной области Фурье определяется следующей функцией (здесь и далее оператор $\hat{(\cdot)}$ означает функцию в спектральной области)

$$\hat{I}_r(\xi) = \overline{\hat{P}(x_r, y_r, z_r, \xi) \cdot e^{-i\tau\omega(\xi)}} \, , \tag{108}$$

где $\omega(\xi) = 2\pi f(\xi)$ – циклическая частота источника, $f(\xi)$ – частота источника, τ – время движения звука из источника в приёмник, $\overline{(\cdot)}$ – оператор комплексного сопряжения, $\hat{P}$ – функция сигнала в приёмнике

$$\hat{P}(x,y,z,\xi) = p(x,y,z,f(\xi)) \cdot \overline{\hat{g}}(\xi) \ , \tag{109}$$

здесь $p\left(x, y, z, f\left(\xi\right)\right)$ – звуковое поле источника, вычисленное для частоты $f\left(\xi\right)$. Значение $\hat{g}\left(\xi\right)$ также может быть оценено как

$$\hat{g}\left(\xi\right) = \frac{\hat{I}_{r_0}\left(\xi\right)}{p\left(x, y, z, f\left(\xi\right)\right)}, \tag{110}$$

где r_0 – индекс опорного источника.

2.8.2 Преобразование Фурье

Преобразование Фурье [109] – операция, сопоставляющая одной функции вещественной переменной другую функцию вещественной переменной. Эта новая функция описывает коэффициенты при разложении исходной функции на элементарные составляющие – гармонические колебания с разными частотами. Преобразование Фурье функции f вещественной переменной является интегральным и задаётся следующей формулой:

$$\hat{f}\left(\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(t\right) e^{-it\xi} dt \tag{111}$$

Также справедлива обратная формула, если интеграл имеет смысл:

$$f\left(t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\xi\right) e^{it\xi} d\xi \tag{112}$$

Важные свойства преобразования Фурье:

1. Линейность:

$$(\widehat{\alpha f + \beta g}) = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{113a}$$

2. Дифференцирование:

$$\widehat{f^{(n)}} = \left(i\xi\right)^n \hat{f} \tag{113b}$$

2.9 Уровень звукового воздействия

Уровень звукового воздействия (sound exposure level, SEL) в области $\Omega = \left\{ (x,y,z) \middle| x_0 \leqslant x \leqslant x_1, y_0 \leqslant y \leqslant y_1, z_0 \leqslant z \leqslant z_b \right\}$ для диапазона частот $[f_1, f_2]$ некоторого источника задаётся следующим интегралом

$$\mathrm{SEL}\left(x,y,z,f_1,f_2\right) = \int\limits_{f_1}^{f_2} \left| \hat{P}\left(x,y,z,\xi\left(f\right)\right) \right|^2 df\,, \tag{114}$$

где $\hat{P}$ – функция сигнала в точке (x, y, z) (109). Полученная величина является достаточно грубой, поэтому при численном вычислении используется простой метод трапеций [110]

$$\mathrm{SEL}_{i,j,k} = d_f \sum_{s=0}^{n_f-1} \left| \hat{P}_{i,j,k,s} \right|^2 \tag{115}$$

на равномерной сетке

$$\begin{aligned}
&\mathrm{SEL}_{i,j,k} \approx \mathrm{SEL}\left(x_i, y_j, z_k, f_1, f_2\right)\,, \\
&\hat{P}_{i,j,k,s} = \hat{P}\left(x_i, y_j, z_k, \xi\left(f_s\right)\right)\,, \\
&x_i = x_0 + i d_x\,, \qquad i = \overline{0, n_x - 1}\,, \\
&y_j = y_0 + j d_y\,, \qquad j = \overline{0, n_y - 1}\,, \\
&z_i = z_0 + k d_z\,, \qquad k = \overline{0, n_z - 1}\,, \\
&f_s = f_1 + s d_f\,, \qquad s = \overline{0, n_f - 1}\,.
\end{aligned} \tag{116}$$

2.10 Колебательные скорость и ускорение

Колебательное ускорение $\mathbf{a}\left(x,y,z\right)$ в области $\Omega = \left\{ (x,y,z) \middle| x_0 \leqslant x \leqslant x_1, y_0 \leqslant y \leqslant y_1, z_0 \leqslant z \leqslant z_b \right\}$ может быть вычислено через градиент акустического давления

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = \left\{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right\} = -\frac{1}{\rho}\nabla p\,. \qquad (117)$$

Используя модовое разложение (18) и извлекая главную осцилляцию $e^{ik_{j,0}x}$, запишем производные акустического давления по пространственным координатам

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial}{x}\left(e^{ik_{j,0}x}\mathcal{A}_j\varphi_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty}e^{ik_{j,0}x}\left(ik_{j,0}\mathcal{A}_j\varphi_j + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{A}_j\varphi_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty}e^{ik_{j,0}x}\left(ik_{j,0}\mathcal{A}_j\varphi_j + \frac{\partial\mathcal{A}_j}{\partial x}\varphi_j + \frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\mathcal{A}_j\right)\,, \qquad (118)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \sum_{i=1}^{\infty}e^{ik_{j,0}x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathcal{A}_j\varphi_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty}e^{ik_{j,0}x}\left(\frac{\partial\mathcal{A}_j}{\partial y}\varphi_j + \frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\mathcal{A}_j\right)\,, \qquad (119)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \sum_{i=1}^{\infty}e^{ik_{j,0}x}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{A}_j\varphi_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty}e^{ik_{j,0}x}\mathcal{A}_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}\,. \qquad (120)$$

Удаление главной осцилляции позволяет перейти к производным по медленно изменяющимся функциям, что в свою очередь приводит к высокой численной стабильности при проведении численного дифференцирования даже простыми конечными разностями.

Колебательная скорость $\mathbf{v}\,(x, y, z)$ также может быть выражена через градиент акустического давления. Используя тот факт, что в частотной области $\mathbf{a} = -i\omega\mathbf{v}$ получим

$$\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\} = \left\{\frac{i}{\omega}a_x, \frac{i}{\omega}a_y, \frac{i}{\omega}a_z\right\} = -\frac{i}{\omega\rho}\nabla p\,. \qquad (121)$$

2.11 Выводы ко второй главе

В данной главе диссертации рассматривается теория широкоугольных модовых параболических уравнений в адиабатическом приближении и предлагается новый способ их решения. В основе этого метода лежит применение аппроксимации Паде к пропагатору уравнения горизонтальной рефракции. Для искусственного ограничения вычислительной области выведены новые граничные условия прозрачности. Описывается лучевая теория для уравнения горизонтальной рефракции, на основе которой вводятся лучевые начальные условия, обладающие сколь угодно широкой апертурой в горизонтальной плоскости. Описывается вычисление временных рядов в точках приёма при распространении импульсных акустических сигналов, а также уровней звукового воздействия. Предлагается способ расчёта колебательных ускорений, вносящий лишь незначительную добавку в общее время вычислений.

Реализация описанных в данной главе методов, а также их валидация, описаны в третьей и четвёртой главах.

Результаты второй главы опубликованы в работах [47, 49, 50].

Глава 3
Реализация метода расчёта акустических полей и его верификация на модельных задачах

В текущей главе рассматривается программная реализация и валидация метода моделирования распространения звука на основе метода параболического уравнения, описанного в предыдущей главе. В рамках диссертационной работы был разработан комплекс программ AMPLE (Ample Modal ParaboLic Equations) на языке программирования C++, размещённый в открытом доступе [40] и позволяющий проводить моделирование распространения звука в сложных трёхмерных океанических волноводах. При разработке программы большое внимание было уделено возможности простого конфигурирования процесса вычисления для нового волновода без необходимости изменять исходный код программы. Так, основным входом программы является конфигурационный файл в формате JSON, содержащий информацию о параметрах среды, источника и вычислительной сетки.

Основная часть главы посвящена всесторонней валидации разработанного программного комплекса и методов моделирования, которая проводится на модельных примерах в сравнении с другими методами. В первую очередь сравнение производится с аналитическим решением для волновода с плоским дном с целью валидации корректности работы разработанных вычислительных схем. Дополнительно проводится исследование работы PML поглощающих слоёв. Далее рассматривается задача распространения звука в волноводе с подводным каньоном и исследуется влияние изменений батиметрии на результирующее поле. Следующий вычислительный эксперимент представляет собой моделирование распространения звуковых волн в клиновидном прибрежном волноводе, являющимся своего рода эталонным примером для валидации методов моделирования поля звукового давления. Решение, полученное с использованием AMPLE, сравнивается с решением методом изображений и ШМПУ [111], показывающее важность использования высоких порядков аппроксимации оператора квадратного корня (см. Главу 2.3). Также для данного волновода рассматриваются задачи трассировки горизонтальных лучей, моделирования векторного поля плотности потока энергии и распространения импульсных акустических сигналов. Последним рассматривается распространение звука в волноводе с близкими к реальным батиметрией и профилем скорости звука в воде.

3.1 Описание программной реализации метода расчёта акустических полей

В рамках данного диссертационного исследования была разработана программа, реализующая методы моделирования звука, описание которых было приведено в Главе 2. Исходный код программы расположен в открытом доступе по адресу: https://github.com/GoldFeniks/Ample. В рамках данной работы было сделано 162 коммита, добавлено 18028 и удалено 8505 строк кода на языке программирования C++.

3.1.1 Средства реализации

В качестве основного языка программирования для реализации проекта был выбран язык C++20 [112], ввиду следующих соображений:

1. C++ является современным кроссплатформенным развивающимся языком программирования;

2. C++ позволяет проводить эффективное управление памятью;

3. C++ поддерживает параллельные вычислению;

4. Программы, написанные на языке C++, зачастую работают быстрее аналогичных программ, написанных на других языках программирования;

5. Стандартная библиотека C++ имеет широкий функционал;

6. Для C++ существует большой набор библиотек, упрощающих разработку;

7. Пакет CAMBALA [85] написан на C++, что упрощает его интеграцию.

3.1.2 Требования к аппаратному обеспечению

- Процессор Intel Core i7 2.5 ГГц;

- 8 Гб оперативной памяти.

3.1.3 Требования к программному обеспечению

- ОС Linux 5.12.2 и выше, и другие ОС, для которых существует компилятор языка C++20 [112];

- Библиотека Boost [113] версии 1.69 и выше;

- Библиотека nlohmann/json [114] версии 3.9.1 и выше;

- Библиотека FFTW [115, 116] версии 3.3.9 и выше.

3.1.4 Требования к пользователю

- Умение пользоваться командной строкой;

- Понимание работы с текстовыми и бинарными файлами;

- Знание формата JSON [117];

- Понимание предметной области.

3.1.5 Используемые модули

- CAMBALA [85] – используется для вычисления модовых функций и соответствующих им горизонтальных волновых чисел (см. 2.1);
- DORK [118] – реализация обобщённого метода Рунге-Кутты и плотной выдачи [108], используется при вычислении координат распространения лучей, соответствующих вертикальным модам (см. 2.6.1);
- delaunay [119] – реализация S-hull алгоритма триангуляции [120], используется для интерполяции данных гидрологии на облаке точек;
- zip [121] – C++ реализация функции zip, аналогично языку программирования Python.
- Eigen [122] – библиотека, содержащая различные инструменты для работы с элементами линейной алгебры: векторы, матрицы, численные методы и прочие алгоритмы.

3.1.6 Структура проекта

- `boundary_conditions` – содержит реализацию PML граничных условий с возможностью использования произвольной функции $\beta(y)$;
- `coefficients` – функции для вычисления аппроксимаций Паде произвольного порядка;
- `config` – класс, предоставляющий интерфейс взаимодействия с конфигурационным файлом (см. конфигурационный файл);
- `initial_conditions` – класс для вычисления различных начальных условий: начальное условие Гаусса (102), начальное условие Грина (103), обобщённый источник Гаусса [88], лучевые начальные условия (см. 2.7.2);

- `modes` – класс для многопоточного вычисления модовых функций и горизонтальных волновых чисел с использованием пакета CAMBALA [85];
- `rays` – класс для вычисления распространения звуковых лучей;
- `solver` – класс, реализующий многопоточное вычисление решения задачи (28).

3.1.6.1 io

Содержит инструменты для чтения и вывода данных.

- `convertors` – функции для преобразования комплексных значений и точек в формат JSON и обратно;
- `reader` – функции чтения многомерных данных из текстовых и бинарных потоков с проверкой соответствия заданному описанию размерностей;
- `writer` – класс для вывода данных в текстовые и бинарные файлы.

3.1.6.2 threads

Содержит инструменты управления и взаимодействия с многопточными вычислениями.

- `buffer_manager` – класс, позволяющий производить безопасные чтение и запись буферов данных из разных потоков выполнения программы;
- `pool` – класс, реализующий многопоточную очередь выполнения задач;

- `task` – класс, описывающий единичную задачу многопоточных вычислений.

3.1.6.3 utils

Содержит вспомогательные инструменты используемые остальными модулями программы.

- `assert` – функции вывода ошибок при несоответствии заданным условиям;
- `callback` – набор инструментов для создания и комбинирования функций обратного вызова;
- `comparators` – функции сравнения произвольных элементов;
- `concepts` – описание концептов для упрощения типизации данных;
- `differentiation` – классы и функции для вычисления первой производной по трём точкам в одно-, двух- и трёхмерном случаях;
- `dimensions` – класс, описывающий измерения входных и выходных данных (см. описание входных данных);
- `event` – класс, описывающий интерфейс события, для упрощения взаимодействия с процессом вычисления решения;
- `fft` – класс, описывающий вещественное и комплексное быстрые преобразования Фурье, упрощающие использование библиотеки FFTW [115, 116];
- `interpolation` – реализует различные виды интерполяции [123, 124]: линейная, билинейная, трилинейная, интерполяция Делонэ;

- `join` – функции конкатенации произвольного количества строк с произвольным разделителем;
- `multi_optional` – класс, описывающий кортеж элементов различных типов, при этом каждый элемент не обязательно содержится в коллекции, аналогично `std::optional` [125];
- `object_descriptor` – класс, описывающий тип и параметры некоторого объекта, использующийся в конфигурационном файле (см конфиг);
- `progress_bar` – класс, отображающий в консоли прогресс выполнения некоторого процесса;
- `to_string_helper` – класс, упрощающий преобразование различных типов данных в строковое представление;
- `types` – набор типов, используемых в программе;
- `utils` – набор вспомогательных функций различного назначения;
- `verbosity` – функции управления уровнем выводимой информации во время работы программы.

3.1.6.4 main

Содержит основную логику работы программы:

- функция `main`, являющаяся точкой входа в программу;
- обработка аргументов командной строки с использованием библиотеки Boost [113];
- чтение и обработка конфигурационных данных;
- запуск вычислений и вывод результата.

3.1.7 Аргументы командной строки

Запуск программы производится из командной строки следующим образом

```
./AMPLE [jobs] [options]
```

Аргумент `jobs` задаёт список вычислений разделённых символом пробел, которые необходимо выполнить. Допустимыми значениями являются:

- `solution` – решение уравнения Гельмгольца (1), является значением по умолчанию;
- `modes` – модовые функции и волновые числа, используя пакет CAMBALA [85];
- `init` – начальные условия;
- `rays` – траектории распространения звуковых лучей;
- `sel` – интегральная характеристика SEL (114);
- `impulse` – импульсы сигнала источника в приёмниках;
- `acceleration` – колебательные ускорения по пространственным координатам x, y, z.

При этом некоторые задачи зависят от других, в результате чего последние будут выполнены и без явно их указания в списке аргументов, однако результаты этих вычислений не будут сохранены. Аргумент `options` представляет собой произвольный набор опций программы, описание которых приведено далее.

3.1.7.1 Основные опции

- `-h [--help]` – отображает информацию об аргументах командной строки и завершить выполнение;

- `-v [--verbosity] arg` – задаёт уровень информации, отображаемой во время работы программы, допустимые значения
  - · 0 – ничего не отображать (значение по умолчанию),
  - · 1 – отображать время работы,
  - · 2 – показывать прогресс выполнения задачи,
  - · 3 – дополнительно к 2 вывести краткую информацию о задаче и среде;
- `-c [--config] path` – задаёт путь к конфигурационному файлу, значение по умолчанию – `"config.json"`.

3.1.7.2 Опции вывода

- `-o [--output] path` – задаёт путь к папке для вывода результатов вычислений, значение по умолчанию – `"output"`;
- `--row_step k` – выводить каждую k – ую вычисленную строку, значение по умолчанию – 10;
- `--col_step k` – выводить каждый k – ый вычисленный столбец, значение по умолчанию – 1;
- `--binary` – использовать бинарный формат выходных файлов вместо текстового.

3.1.7.3 Опции вычислений

- `-w [--workers] arg` – задаёт количество потоков, используемых для вычислений, значение по умолчанию – 1;
- `-b [--buff] arg` – задаёт размер буфера, используемого во время параллельных вычислений, значение по умолчанию – 100.

3.1.8 Формат входных данных

Основным входным файлом программы является конфигурационный файл в формате JSON [117], содержащий информацию о параметрах среды, сетки вычислительной области, координатах приёмника и источника, свойствах начальных условий и численного решения. Примеры конфигурационных файлов даны в Приложении А.

3.1.8.1 Типы данных

В дополнение к стандартным типам JSON в конфигурационном файле используются следующие типы:

- `complex` – комплексное число, представляемое одним из следующих способов
  - вещественное число, мнимая часть равна 0;
  - список, состоящий из двух вещественных чисел – вещественная и мнимая часть числа соответственно;
  - JSON объект, имеющий два поля, значения которых – вещественные числа: `real` – вещественная часть числа, `imag` – мнимая часть числа;
- `point` – произвольная точка в пространстве $\mathbb{R}^3$, представляемая одним из следующих способов
  - список, состоящий из трёх вещественных чисел – координаты точки x, y, z соответственно;
  - JSON объект, имеющий три вещественных поля `x`, `y`, `z` – координаты точки.

Типы табличных данных, содержащихся в файлах, указаны в Таблице 1.

Таблица 1 – Типы табличных данных

Тип данных	Текстовый файл	Бинарный файл
double	вещественное число, понимаемое стандартной библиотекой языка C++	IEEE double [126]
complex	два числа типа double, разделённых символом пробел	16 байт – два числа типа double
point	три числа типа double, разделённых символом пробел	24 байта – три числа типа double

3.1.8.2 Поля конфигурационного файла

Простые поля конфигурационного файла (скалярные значения и списки) указаны в Таблице 2.

Следующие поля конфигурационного файла задаются JSON объектами и строками

- init – тип используемых начальных условий, допустимые значения: "gauss" (102), "greene" (103), "ray_simple" (107).
- tapering – параметры сглаживания начальных условий на границах области, задаются JSON объектом, описанным в Таблице 3.
- coefficients – параметры аппроксимации квадратного корня, задаются JSON объектом, описанным в Таблице 4.
- boundary_conditions – параметры граничных условий, задаются JSON объектом, описанным в Таблице 5.
- input_data – список входных многомерных данных, формат которых описан в 3.1.8.3. Также может являться строкой, задающей путь к файлу JSON, содержащему объект в том же формате. Для восстановления значений в промежуточных точках используется соответствующая количеству измерений линейная интерполяция [123]. Допустимы

следующие категории данных

- `bathymetry` – значения глубин дна, имеет 2 измерения, x и y соответственно.
- `hydrology` – значения профилей скорости звука в воде, имеет 2 измерения, z и x соответственно, специальное значение -1 означает, что скорость звука в данной точке не известна, для получения значений в промежуточных точках используется интерполяция Делонэ [124].
- `phi_s` – значения модовых функций в источнике, имеет одно рваное измерение – количество мод в зависимости от номера частоты, не может иметь значений координат.
- `phi_j` – значения модовых функций в среде, имеет 4 измерения: количество мод в зависимости от номера частоты, x, y, z; первое измерение является рваным и не может иметь значений координат.
- `frequencies` – одномерный список значений частот при которых нужно вычислить звуковое поле, не может иметь значений координат.
- `receivers` – одномерный список точек приёма в формате `point`, измерение не может иметь значений координат.
- `k0` – вещественные значения волновых чисел источника, имеет одно рваное измерение – количество мод в зависимости от номера частоты, не может иметь значений координат.
- `complex_k0` – комплексные значения волновых чисел источника, аналогично `k0`.
- `k_j` – вещественные значения волновых чисел в среде, имеет 3

измерения: количество мод в зависимости от номера частоты, x, y; первое измерение является рваным и не может иметь значений координат.

- complex_k_j – комплексные значение волновых чисел в среде, аналогично k_j.
- source_function – одномерный список значений функции источника или приёмника в зависимости от времени.
- source_spectrum – одномерный список комплексных значений спектра источника или приёмника в зависимости от частоты, не может быть одновременно указан с frequences.

Таблица 2 – Простые поля конфигурационного файла

Имя	Тип значения	Знач. по ум.	Описание
mode_subset	double	-1	подмножество вычисляемых мод
ppm	integer	2	количество точек на 1 метр при вычислении мод
ord_rich	integer	3	порядок аппроксимации Ричардсона [127]
max_mode	integer	-1	максимальное количество используемых мод
n_modes	integer	0	использовать такое количество мод
n_layers	integer	1	количество водяных слоёв
x0 x1 nx	double double integer	0 - -	параметры вычислительной области по координате x
y0 y1 ny	double double integer	- - -	параметры вычислительной области по координате y
z0 z1 nz	double double integer	- - -	параметры вычислительной области по координате z
y_s	double	0	координата y источника
z_s	double	-	глубина источника
bottom_rhos	double[]	[1.5]	значения плотностей слоёв дна
bottom_layers	double[]	[500]	значения глубин слоёв дна
bottom_c1s bottom_c2s	double[] double[]	[1700] [1700]	значения скорости звука на верхней и нижней границах дна
betas	double[]	[0,0.5]	значения параметра β (6)
complex_modes	bool	true	учитывать затухание (использовать мнимую часть коэффициента (6))
const_modes	bool	true	считать, что моды не зависят от x
additive_depth	bool	false	глубины донных слоёв задаются относительно глубины дна
a0 a1 na	double double integer	-pi/4 pi/4 90	параметры вычислительной сетки по углу при вычислении звуковых лучей
l0 l1 nl	double double integer	0 4000 4001	параметры вычислительной сетки по натуральному параметру при вычислении звуковых лучей
mnx mny	integer integer	- -	количество точек по осям x и y при вычислении мод

Окончание таблицы 2

Имя	Тип значения	Знач. по ум.	Описание
tolerance	double	0.02	минимальное относительное значение функции источника
reference_index	integer	0	индекс опорного источника (110)
sel_range	double[]	[-1,-1]	диапазон частот для SEL (см. 2.9)
sel_strict	bool	false	учитывать только частоты из диапазона sel_range

Таблица 3 – Описание значения поля tapering

Поле		Тип значения	Описание
type		string	"angeled" – сглаживает начальное условие в угловом интервале, является значением по умолчанию "percentage" – сглаживает начальное условие на части сетки
parameters	left right	double	значения левого и правого интервалов сглаживания
	value	double	одно значение для left и right, по умолчанию – 0.1

Таблица 4 – Описание значения поля coefficients

Поле		Тип значения	Описание
type		string	"wampe" – коэффициенты для метода 2.3.1 "ssp" – коэффициенты для метода 2.3.2, является значением по умолчанию
parameters	n	integer	степень полинома знаменателя, по умолчанию – 1
	m		степень полинома числителя, если опущено, используется значение n

Таблица 5 – Описание значения поля `boundary_conditions`

<table>
<tr><th colspan="2">Поле</th><th>Тип значения</th><th>Описание</th></tr>
<tr><td colspan="2"><code>type</code></td><td><code>string</code></td><td><code>"pml"</code> – PML граничные условия (см. 2.5.1)</td></tr>
<tr><td rowspan="2"><code>parameters</code></td><td><code>width</code></td><td><code>integer</code></td><td>ширина граничных условий в точках</td></tr>
<tr><td><code>function</code></td><td><code>object</code></td><td>описание функции $\beta(\zeta)$ (см. Таблицу 6)</td></tr>
</table>

Таблица 6 – Описание функции $\beta(\zeta)$

<table>
<tr><th colspan="2">Поле</th><th>Тип значения</th><th>Описание</th></tr>
<tr><td colspan="2"><code>type</code></td><td><code>string</code></td><td><code>"cubic"</code> – функция (55)
<code>"tabular"</code> – функция, заданная таблично на отрезке $[0, 1]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"><code>parameters</code></td><td><code>scale</code></td><td><code>double</code></td><td>параметр масштаба β_0</td></tr>
<tr><td><code>values</code></td><td><code>double[]</code></td><td>значения функции</td></tr>
</table>

3.1.8.3 Описание многомерных данных

Многомерные данные описываются следующим JSON объектом

- `type` – категория описываемых данных, например `"hydrology"`;
- `dimensions` – описание размерностей данных, представляет собой список, состоящий из комбинации следующий значений
  - вещественное число – количество элементов измерения;
  - JSON объект, формат которого описан в Таблице 7, поля `values` и `bound` не могут быть указаны одновременно, но могут отсутствовать, в этом случае координаты измерения считаются равномерно распределёнными на отрезке $[0, 1]$, также указание координат может быть недопустимо для некоторых измерений определённых категорий данных (например, количество приёмников);
  - список указанных выше значений, в этом случае измерение задаётся несколько раз, так называемое «рваное» измерение (например количество мод в зависимости от номера частоты).
- `values` – список значений многомерных данных, при этом каждое отдельное измерение может быть заменено на путь к файлу, содержащему данные;
- `binary` – являются файлы указанные в `value` бинарными.

Таблица 7 – Описание измерения

Поле	Тип значения	Описание
`n`	`integer`	количество элементов измерения
`values`	`double[]`	явные значения координат
	`string`	путь к текстовому файлу, содержащему значения координат
`bounds`	`object`	описание равномерной сетки координат согласно Таблице 8

Таблица 8 – Описание равномерной сетки координат

Поле	Тип значения	Описание
`a`	`double`	левая граница интервала
`b`	`double`	правая граница интервала
`d`	`double`	шаг сетки, игнорируется во входных данных

3.1.8.4 Описание выходных данных

Выходные записываются в папку, указываемую аргументами командной строки (см. 3.1.7), если такой папки не существует, она будет создана автоматически. В случае наличия конфликтующих файлов они будут перезаписаны. В результате работы программы будут созданы файлы `config.json` и `meta.json`, а также папки, содержащие многомерные выходные данные. Файл `config.json` содержит информацию из конфигурационного файла, указанного при запуске программы, а также значения параметров, которые были использованы во время работы, но не были явно указаны. Файл `meta.json` содержит следующие поля

- `command_line_arguments` – аргументы командной строки переданные при запуске программы.
- `computation_time` – время выполнения в секундах.
- `f` – список частот, использованных во время вычислений.
- `jobs` – список выполненных вычислений.
- `original_config_path` – путь к конфигурационному файлу, указанный в аргументах командной строки.
- `outputs` – список описаний многомерных выходных данных, аналогично `input_data`. Возможные следующие категории
    - `phi_j`, `k_j`, `phi_s`, `k0`, `complex_k0` – аналогично `input_data`;
    - `init` – начальные условия, использованные во время вычислений, имеет 2 измерения: количество мод и y;
    - `rays` – пары координат (x, y) распространения звуковых лучей, имеет 3 измерения: количество мод, α, l (см. 2.6.1);

- `sel` – значения SEL в вычислительной области, имеет 3 измерения: x, y, z;
- `impulse` – импульс источника вычисленный в точках приёма, имеет 2 измерения: номер приёмника и время (см. 2.8);
- `solution` – вычисленное звуковое поле, имеет 4 координаты: номер частоты и x, y, z;
- `acceleration_x`, `acceleration_y`, `acceleration_z` – колебательные ускорения по соответствующим пространственным координатам, имеют 4 координаты: номер частоты и x, y, z.

Данные, зависящие от частоты, будут сохранены в отдельных папках, содержащих файл `meta.json`, описывающий эти данные, и отдельные файлы с данными для каждой частоты, имеющие названия `frequency.(txt|bin)`, где `frequency` – частота при которой были получены данные. Измерения, представляющие собой количество мод, имеют разный размер в зависимости от номера частоты, для которой выполняются расчёты.

3.2 Вычислительные эксперименты

3.2.1 Волновод мелкого моря с плоским дном

Проверка корректности работы вычислительных схем и PML граничных условий была проведена на примере моделирования акустических волн в волноводе Пекериса, являющимся волноводом с постоянной глубиной дна, поэтому волновые числа постоянны, а модовые функции зависят только от глубины. В рамках такой задачи известно аналитическое решение, которое может быть записано как [88]

$$p\left(x,y,z\right) = \frac{i}{4}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j\left(z_s\right)\varphi_j\left(z\right)H_0^{(1)}\left(k_j\sqrt{x^2+y^2}\right)\,, \qquad (122)$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля нулевого порядка первого рода [128]. При проведении экспериментов были установлены следующие параметры

- источник расположен на глубине $z_s = 100$ м;
- глубина дна равна 200 м;
- частота источника равна $f = 25$ Гц;
- звуковое поле вычисляется на глубине $z = 30$ м на равномерной сетке

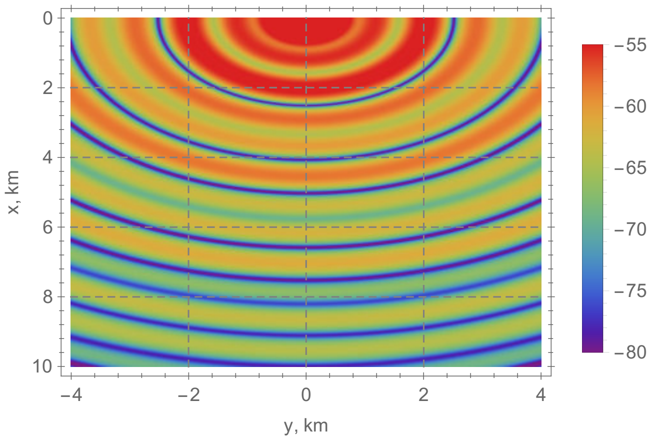
$$\begin{aligned} &y_0 = -4 \text{ км}\,, \quad y_1 = 4 \text{ км}\,, \quad n_y = 8001\,, \\ &x_0 = 50 \text{ м} \qquad x_1 = 10 \text{ км}\,, \quad n_x = 10001\,; \end{aligned} \tag{123}$$

- ширина PML слоёв равнялась 500 точек с обоих сторон вычислительной области, параметр масштаба равен $\beta_0 = 5$ (см. 2.5.1);
- использовались простые лучевые начальные условия (107) с апертурой $\alpha \approx \pm 89.95°$;
- количество потоков вычисления 4.

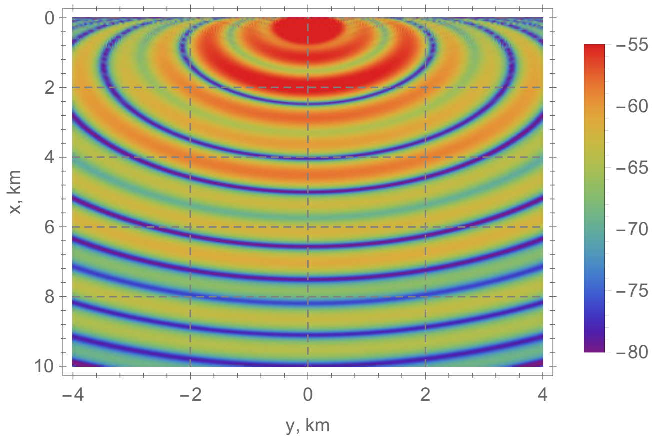
При таких параметрах среды имеются три захваченные (водные) моды. Звуковое поле было вычислено методом SSP (см. 2.3.2) с использование разных порядков аппроксимации Паде, результаты вычислений показаны на Рисунке 1. Сравнение проводилось с аналитическим решением и решением, полученным предыдущей версией программы с начальным условием Грина и аппроксимацией Клаербоута квадратного корня [111]. Из рисунка видно, что использование лучевых начальных условий и большего порядка аппроксимации позволяет добиться существенно лучших результатов по сравнению с обычным широкоугольным параболическим уравнением, при этом апертура решения является явно выраженной. При $p = 17$ полученное решение почти не отличается от аналитического, что говорит о том, что численная схема позволяет получать решение любой апертуры. Использование метода Крэнка-Николсон (см. 2.3.1) ожидаемо показывает такие же результаты, таким образом, свойства полученного решения не зависят от выбора численной схемы. Время выполнения программы указано в Таблице 9. Принцип работы поглощающих слоёв PML изображён на Рисунке 3, звуковое поле постепенно затухает при движении вглубь слоя. На Рисунке 2 показаны результаты вычисления акустического поля с использованием начального условия Грина. Полученное таким образом решение значительно хуже сохраняет широкоугольные свойства уравнения, образуя численный шум в начале вычислительной области. Время, затраченное на проведение вычислений, отображено в Таблице 9.

Таблица 9 – Время вычисления звукового поля в волноводе Пекериса

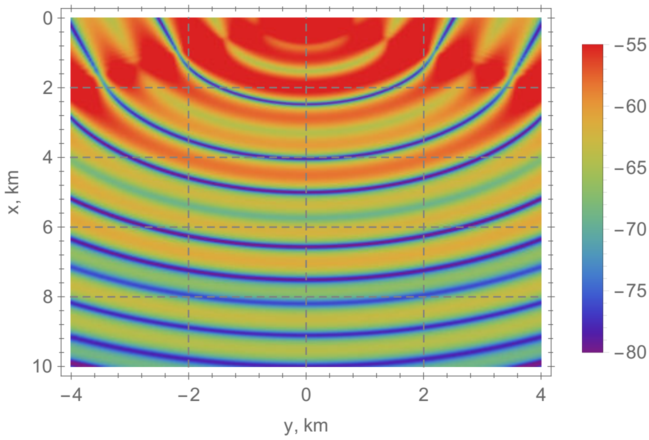
Порядок аппроксимации	Время работы, с	Порядок аппроксимации	Время работы, с
1	4.6	9	15.029
5	9.624	17	25.928



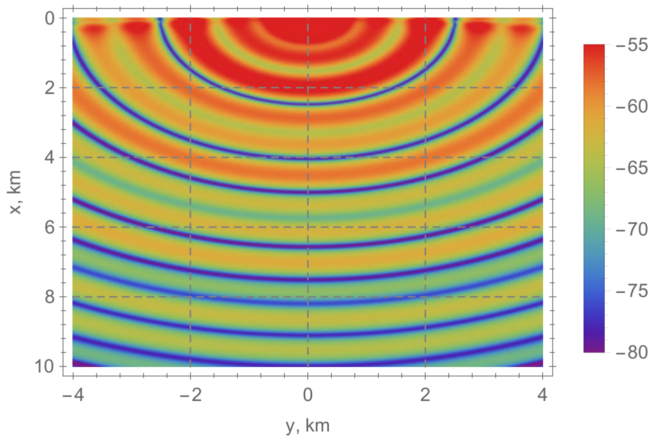
(a) Аналитическое решение



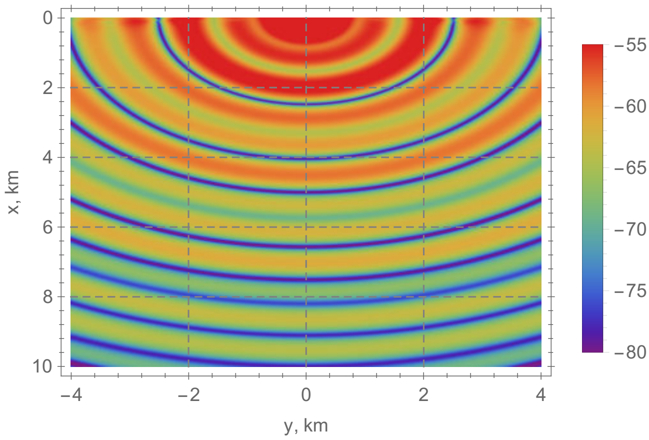
(b) Решение ШМПУ



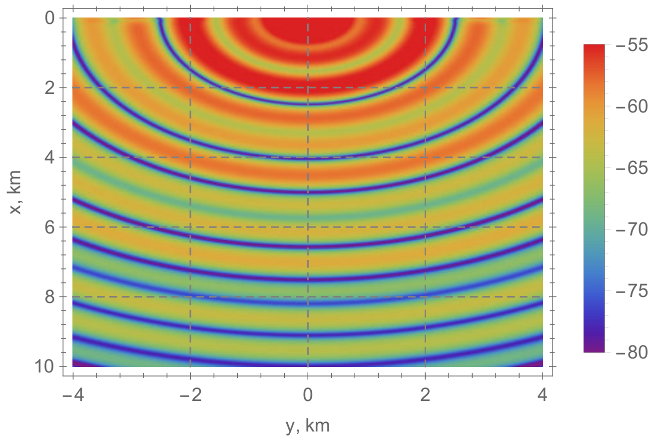
(c) SSP, $p = 1$



(d) SSP, $p = 5$

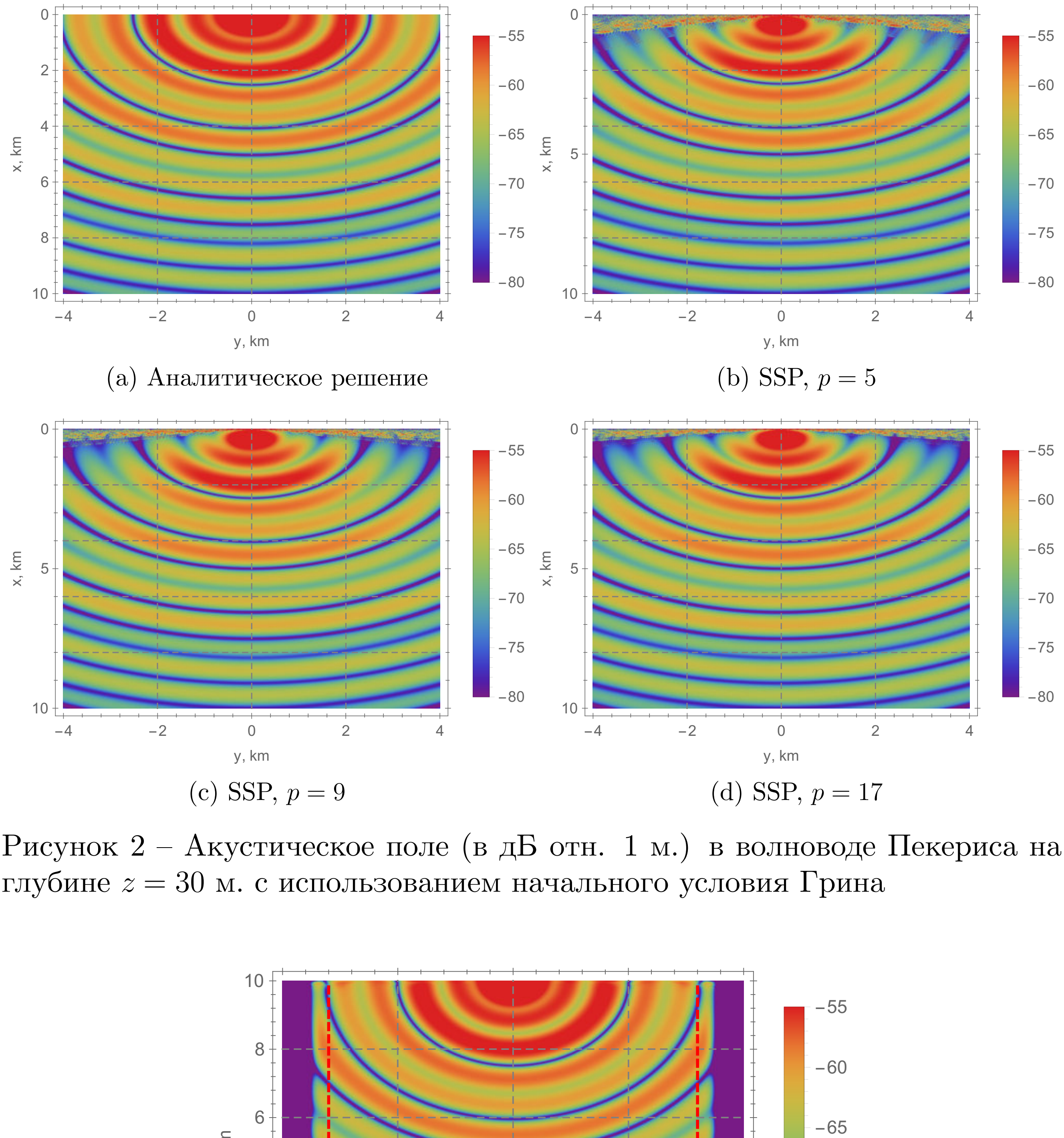


(e) SSP, $p = 9$



(f) SSP, $p = 17$

Рисунок 1 – Акустическое поле (в дБ отн. 1 м.) в волноводе Пекериса на глубине $z = 30$ м. с использованием лучевых начальных условий



(a) Аналитическое решение

(b) SSP, $p = 5$

(c) SSP, $p = 9$

(d) SSP, $p = 17$

Рисунок 2 – Акустическое поле (в дБ отн. 1 м.) в волноводе Пекериса на глубине $z = 30$ м. с использованием начального условия Грина

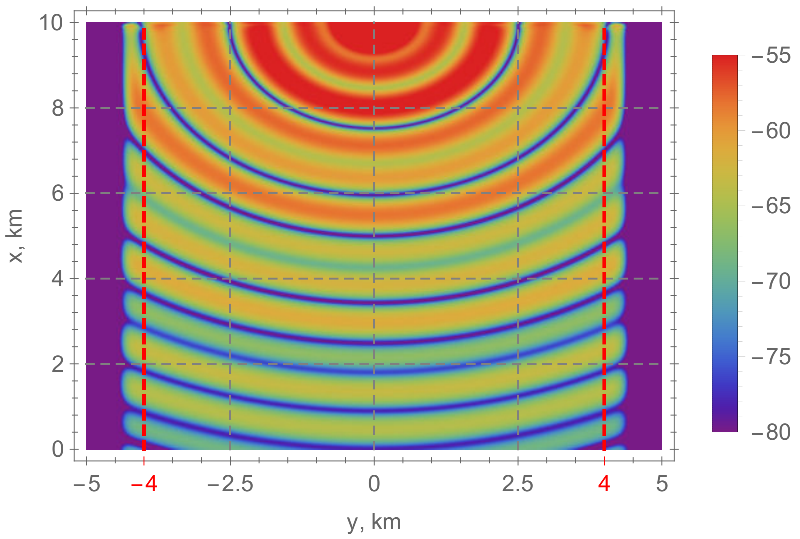


Рисунок 3 – Акустическое поле (в дБ отн. 1 м.) в волноводе Пекериса на глубине $z = 30$ м., слои PML отмечены красной пунктирной линией, ширина слоёв составляет 1000 точек, порядок аппроксимации $p = 13$

3.2.2 Волновод мелкого моря с подводным каньоном

Следующим вычислительным экспериментом является моделирование распространения звуковых волн, создаваемых точечным источником в мелком море с подводным каньоном, схематическое изображение такого волновода изображено на Рисунке 4. Рельеф дна описывается функцией

$$z = h(y) = h_0 + \Delta h \, \mathrm{sech}^2(\sigma y) \; . \tag{124}$$

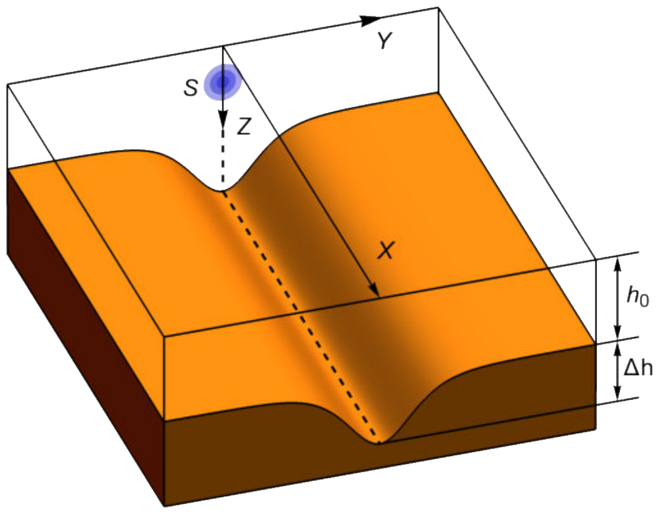


Рисунок 4 – Схематическое изображение подводного каньона

В данном эксперименте были использованы следующие параметры

$$\begin{aligned} h_0 &= 50\text{ м}\,, & \Delta h &= 5\text{ м}\,, & \sigma &= 0.005\,, \\ z_s &= 10\text{ м}\,, & p &= 11\,, & \alpha &\approx \pm 86^\circ\,, \\ x_0 &= 50\text{ м}\,, & x_1 &= 30\text{ км}\,, & n_x &= 30001\,, \\ y_0 &= -1\text{ км}\,, & y_1 &= 1\text{ км}\,, & n_y &= 2001\,, \end{aligned} \tag{125}$$

при которых на частоте $f = 120$ Гц имеются четыре захваченные моды. Звуковое поле было вычислено с порядком аппроксимации $p = 11$, результаты вычислений отображены на Рисунке 6, время вычисления составило

22.791 с. На рисунках хорошо видно, как звук фокусируется в каньоне. Решение, полученное предыдущей версией программы почти не отличается от решения, полученного методом SSP, что подтверждает теорию о том, что в рамках данной задачи апертура уравнения играет незначительное роль. На Рисунке 5 полученное решение сравнивается с решением трёхмерного параболического уравнения [83, 84, 77]. Из рисунка видно, что решения достаточно сильно совпадают, как и в случае с широкоугольным параболическим уравнением [111].

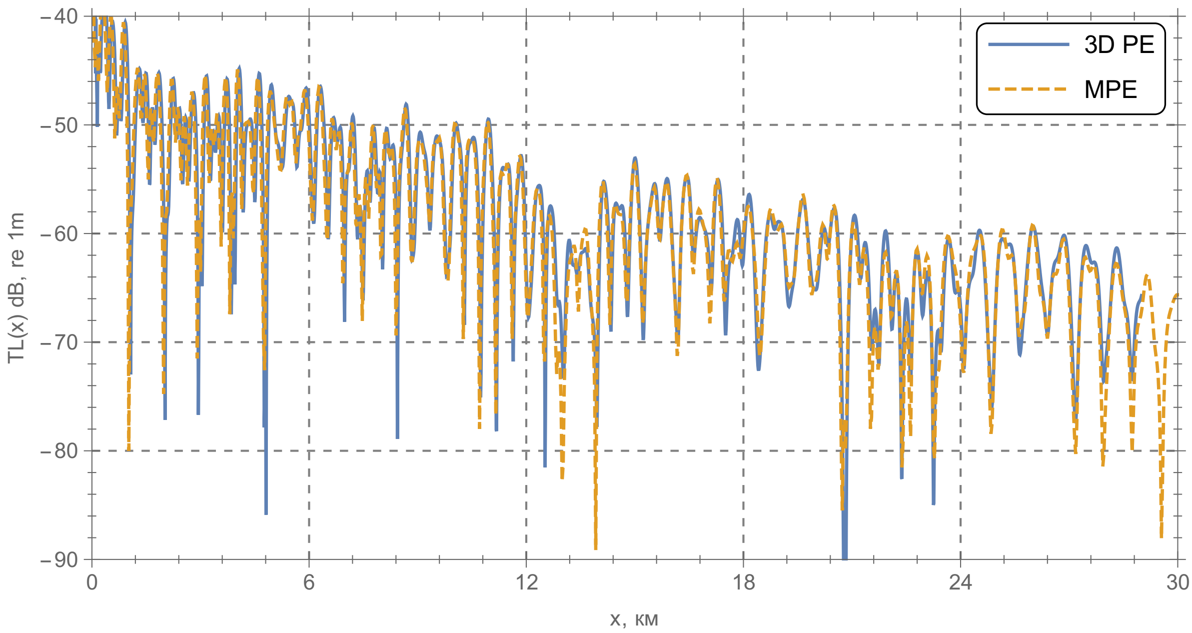
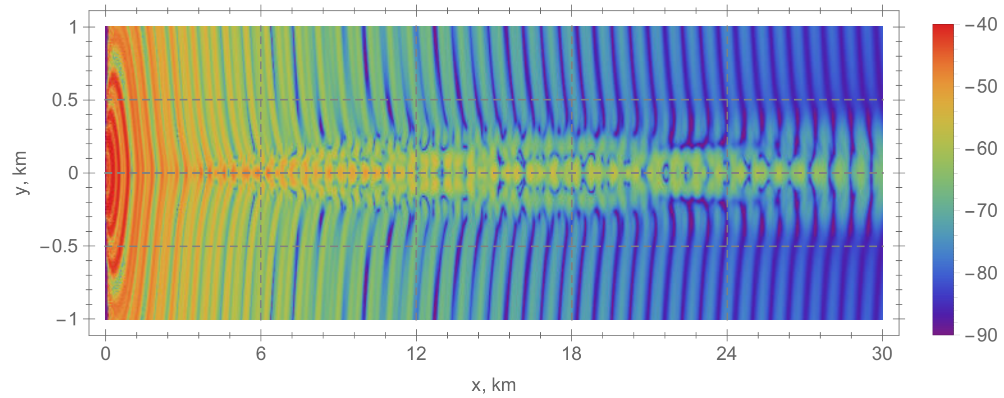
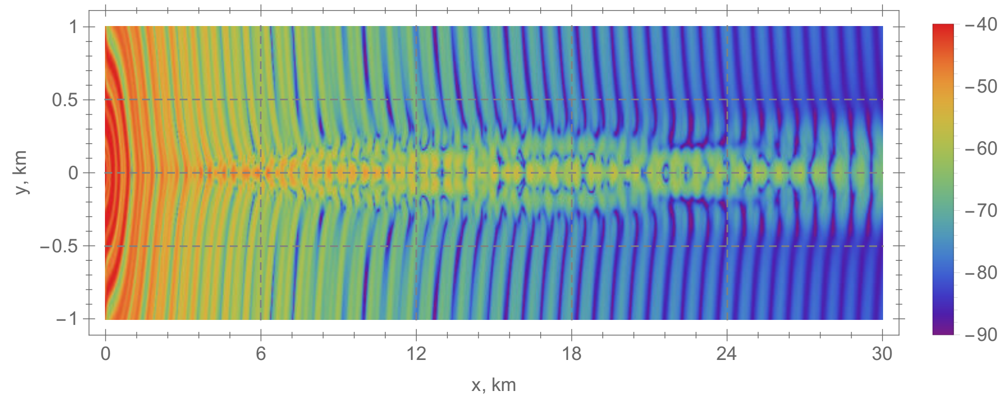


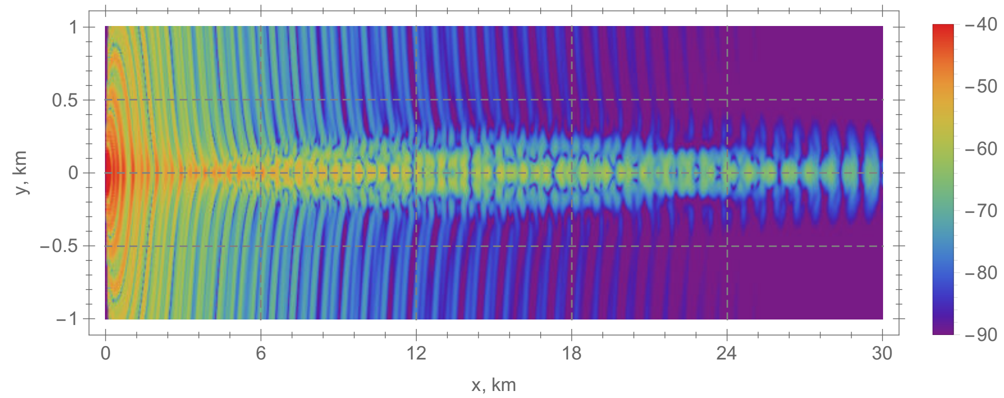
Рисунок 5 – Сравнение результатов вычисления акустического поля (в дБ отн. 1 м.) в мелком море с подводным каньоном при $y = 0$ км. на глубине $z = 10$ м.



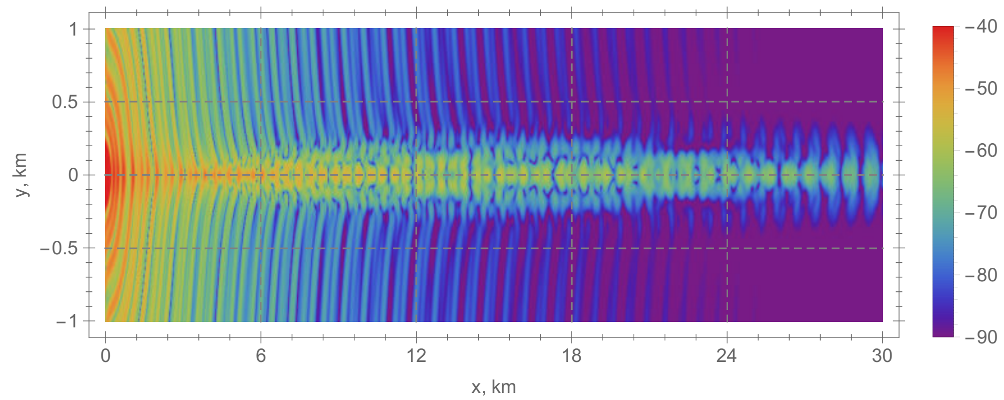
(a) Решение ШМПУ, $z = 10$ м



(b) SSP, $z = 10$ м



(c) Решение ШМПУ, $z = 55$ м



(d) SSP, $z = 55$ м

Рисунок 6 – Акустическое поле (в дБ отн. 1 м.) в клиновидном волноводе

3.2.3 Клиновидный волновод мелкого моря

Следующий вычислительный эксперимент был проведён для моделирования распространения звуковых волн в мелком море с подводным клином. Схематическое изображение этого волновода дано на Рисунке 7. Ре-

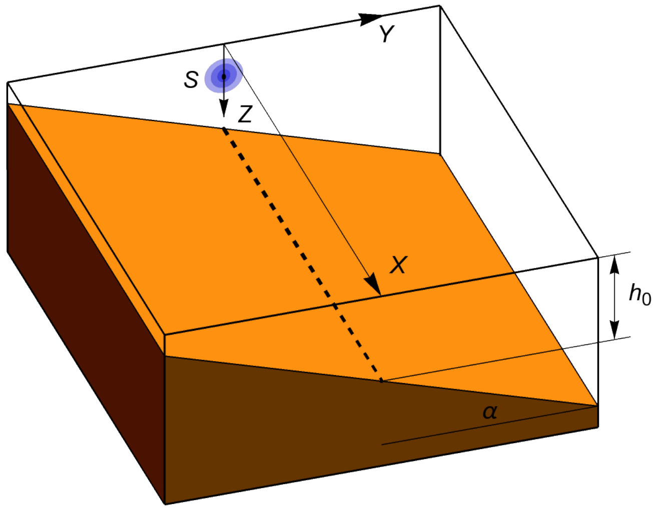


Рисунок 7 – Схематическое изображение подводного каньона

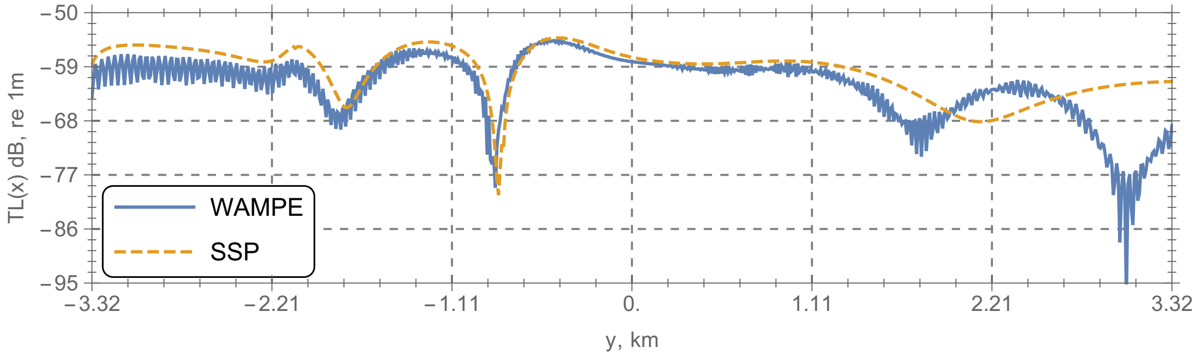
льеф дна задаётся функцией

$$z = h\,(y) = h_0 + y \tan\alpha\,. \tag{126}$$

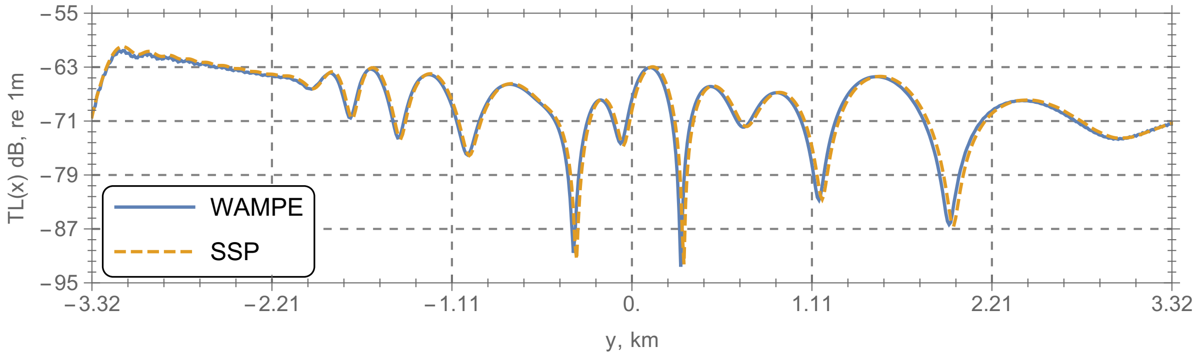
Точечный источник расположен достаточно далеко от вершины клина на глубине $z = z_s$. Акустическое поле было вычислено на глубине $z = 30$ м и были использованы следующие параметры

$$\begin{aligned}
z_s &= 100 \text{ м}\,, & h_0 &= 200 \text{ м}\,, & \alpha &\approx 2.86^\circ\,,\\
f &= 25 \text{ Гц}\,, & p &= 13\,, & a &= \pm 89.95^\circ\,,\\
x_0 &= 50 \text{ м}\,, & x_1 &= 25 \text{ км}\,, & n_x &= 50001\,,\\
y_0 &= -3.32 \text{ км}\,, & y_1 &= 3.32 \text{ км}\,, & n_y &= 13282\,.
\end{aligned} \tag{127}$$

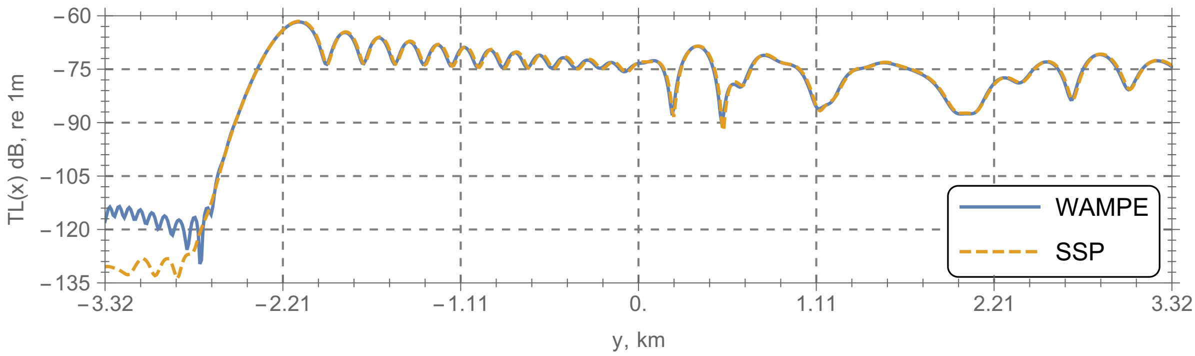
Результат вычислений показан на Рисунке 9, время работы программы составило 173.386 с. В целом решения ШМПУ и SSP похожи, однако даже на значительно расстоянии от источника заметна более широкая апертура SSP решения. Так как используемая модель не учитывает взаимодействия мод, звуковое поле обрезается, ввиду того, что при уменьшении глубины дна пропадают моды старших порядков. На Рисунке 8 показано сравнение решений при различных координатах x, из которого видно, что вблизи источника SSP решение не образует численного шума, а при отдалении от источника становится заметна более широкая апертура этого решения. Также было проведено сравнение с решением методом изображений [129, 130]. Сравнение результатов моделирования на Рисунке 10 показывает, что при малых углах скольжения относительно изобаты интерференционная картина решения в дальнем поле полностью определяется горизонтальной рефракцией звука, в то время как межмодовым взаимодействием можно пренебречь. Также, как показано на Рисунке 11, решения всех методов почти совпадают, не смотря на адиабатическую природу модовых параболических уравнений, при этом большая апертура SSP метода ещё сильнее приближает решение к решению методом изображений вдали от источника. Отсюда следует важный физический вывод о том, что при распространении звука в направлении вдоль изобат в мелком море (или под малыми углами скольжения горизонтальных лучей относительно изобат) допускается использование адиабатических моделей, таких как AMPLE. Данный эффект подтверждается и другими численными экспериментами, проведёнными в рамках данного диссертационного исследования, в т.ч. для случая широкополосных сигналов.



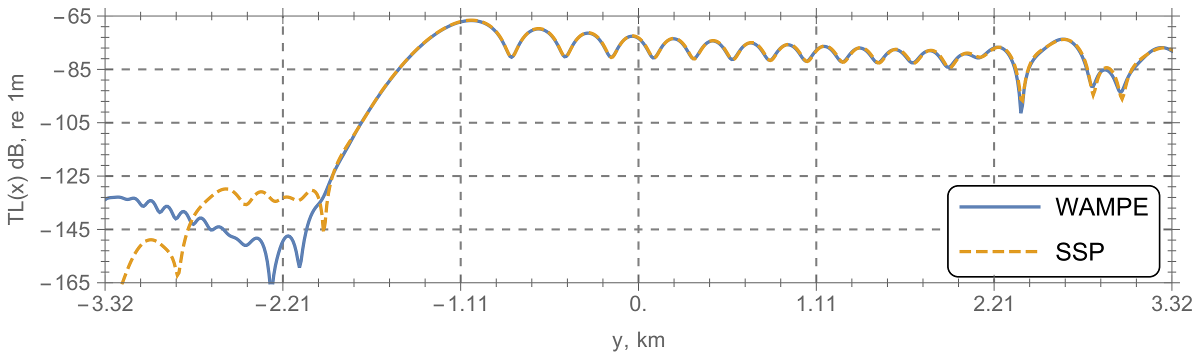
(a) $x_c = 1$ км.



(b) $x_c = 9$ км.

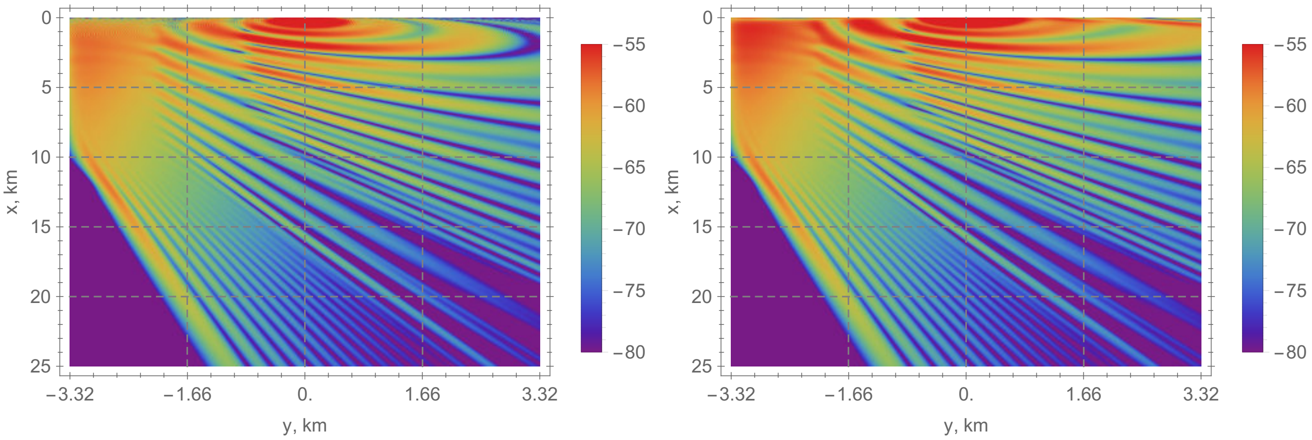


(c) $x_c = 17$ км.



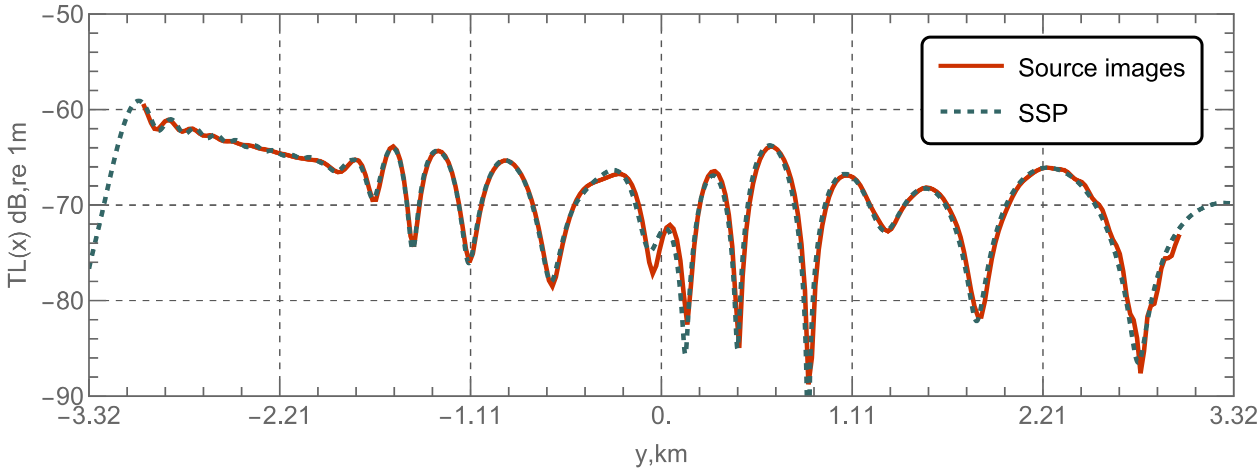
(d) $x_c = 25$ км.

Рисунок 8 – Сравнение результатов вычисления акустического поля с использованием метода широкоугольного параболического уравнения и метода SSP (AMPLE) (в дБ отн. 1 м.) в мелком море с подводным клином при $x = x_c$

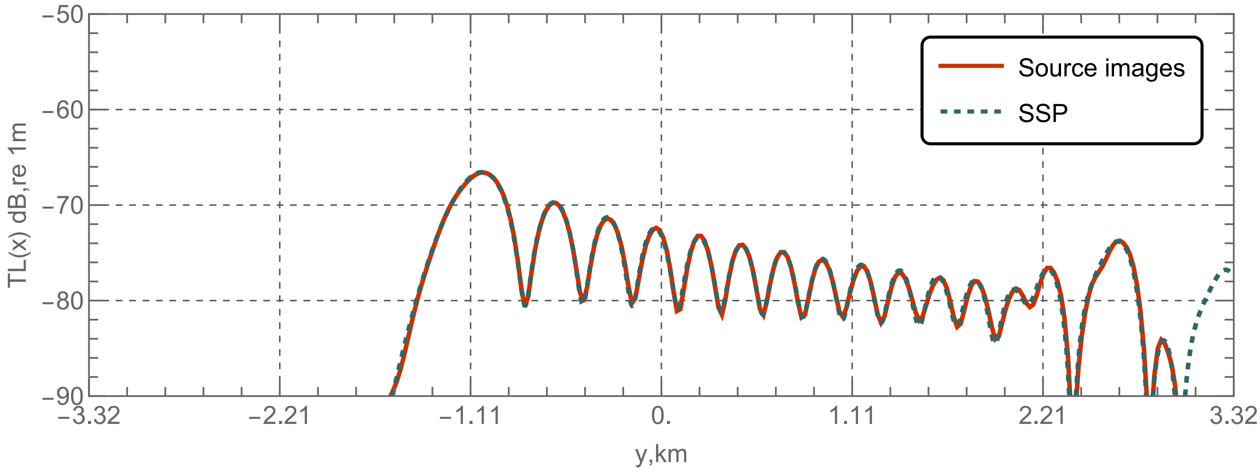


(a) Решение ШМПУ (b) SSP

Рисунок 9 – Акустическое поле (в дБ отн. 1 м.) в мелком море с подводным клином при $z = 30$ м.



(a) $x_c = 10$ км.



(b) $x_c = 25$ км.

Рисунок 10 – Сравнение результатов вычисления акустического поля с использованием метода мнимых источников и метода SSP (AMPLE) (в дБ отн. 1 м.) в мелком море с подводным клином при $x = x_c$ км.

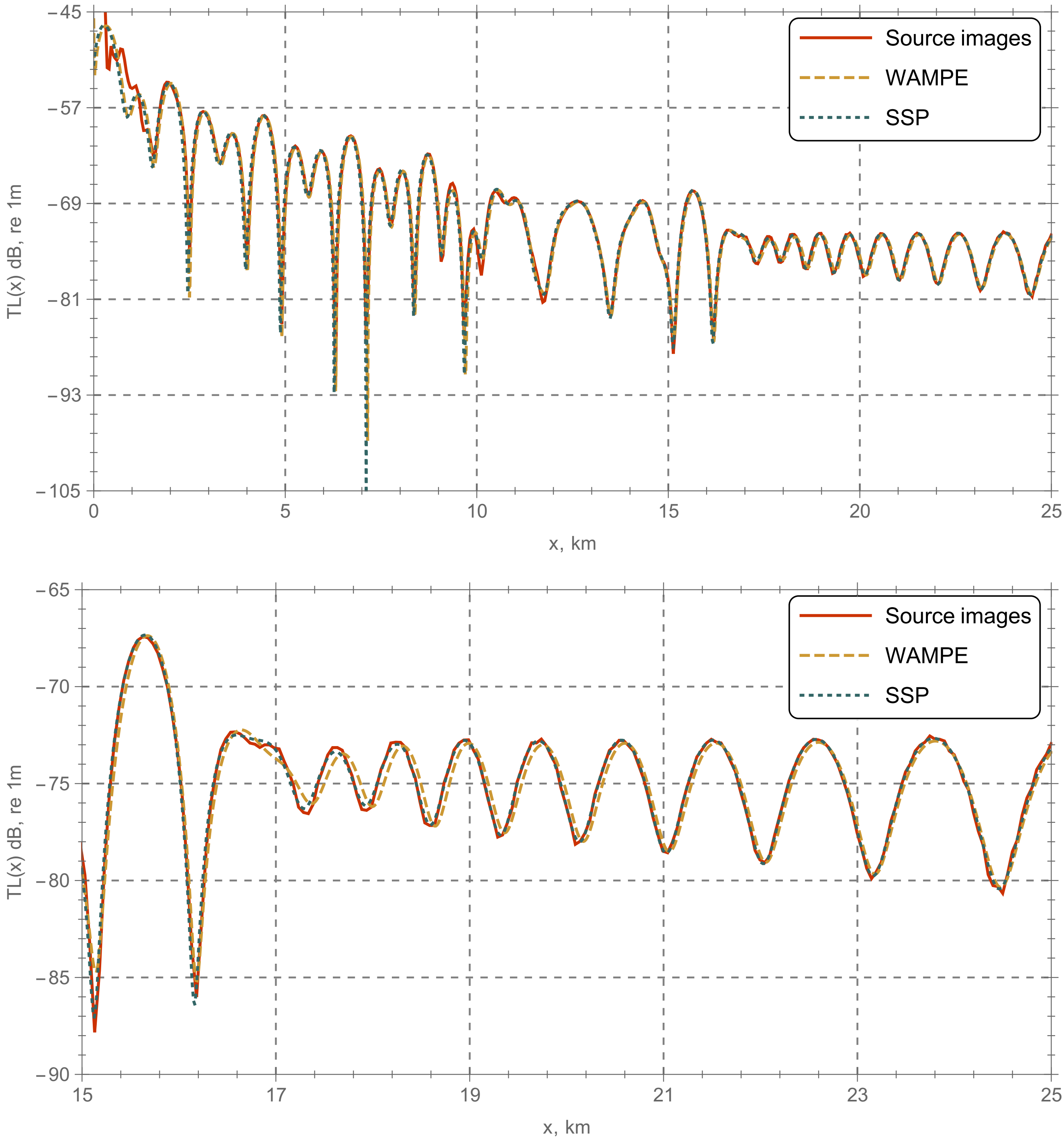


Рисунок 11 – Сравнение результатов вычисления акустического поля с использованием метода мнимых источников, метода широкоугольного параболического уравнения и метода SSP (AMPLE) (в дБ отн. 1 м.) в мелком море с подводным клином при $y = 0$ км.

3.2.3.1 Трассировка горизонтальных лучей

Рассмотрим задачу трассировки горизонтальных лучей в клиновидном волноводе (см. Главу 2.6.1). При распространении в среде, однородной по пространственной координате x, то есть при $k_j(x,y) \equiv k_j(y)$, справедлив закон Снеллиуса

$$k_j(y)\cos\left(\alpha_{j,\psi}(y)\right) = C\,, \tag{128}$$

где $\alpha_{j,\psi}(y)$ – угол скольжения луча относительно оси x, ψ – угол скольжения луча в источнике (см. Рис. 12), $C \in \mathbb{R}$ – некоторая константа. Тогда,

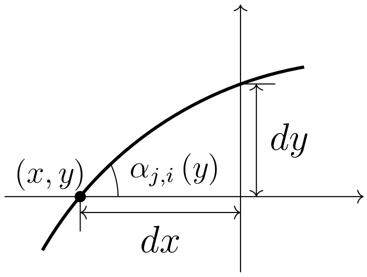


Рисунок 12 – Схематичное изображение распространения горизонтального луча.

положив $C = k_j(0)\cos(\psi)$, получим

$$\tan\left(\alpha_{j,\psi}(y)\right) = \frac{dy}{dx}\,, \tag{129}$$

$$1 + \tan^2\left(\alpha_{j,\psi}(y)\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\alpha_{j,\psi}(y)\right)}\,, \tag{130}$$

$$\frac{k_j(y)}{C^2} = \frac{1}{\cos^2\left(\alpha_{j,\psi}(y)\right)} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\,, \tag{131}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{k_j^2(y)}{k_j^2(0)\cos^2(\psi)} - 1}\,, \tag{132}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{k_j^2(y)}{k_j^2(0)\cos^2(\psi)} - 1}}\,. \tag{133}$$

Рассмотрим луч, исходящий из точки $x(0,\psi) = y(0,\psi) = 0$ и выпущенный под углом ψ, представим его в виде кривой $\{x(s,\psi), y(s,\psi)\}$ и получим представление координаты x в виде криволинейного интеграла второго рода вдоль кривой $l^{\psi} : y\,(s, \psi)$ (значения координаты y распространения луча)

$$x\,(S, \psi) = \int\limits_{l_S^{\psi}} \frac{\mathrm{d}y\,(s, \psi)}{\sqrt{\frac{k_j^2(y(s,\psi))}{k_j^2(0)\cos^2(\psi)} - 1}} = \int\limits_{0}^{S} \frac{y_t'\,(s, \psi)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{\frac{k_j^2(y(s,\psi))}{k_j^2(0)\cos^2(\psi)} - 1}}\,. \tag{134}$$

Сравнение результатов моделирования с использованием программы AMPLE и численного интегрирования (134) представлены на Рис. 13.

3.2.3.2 Моделирование векторного поля плотности потока энергии

Плотность потока энергии описывает скорость передачи энергии акустической волны через единицу площади перпендикулярно к направлению распространения волны и определяется как активная компонента вектора интенсивности [131]

$$\mathbf{I}\,(x, y, z) = \frac{1}{2}\left\langle \mathcal{R}\left(p\,(x, y, z, t)\,\overline{\mathbf{v}\,(x, y, z, t)}\right)\right\rangle\,, \tag{135}$$

где $\langle\cdot\rangle$ обозначает усреднение по интервалу времени, кратному одному периоду, $\overline{(\cdot)}$ – оператор комплексного сопряжения, $p\,(x, y, z, t)$ – скалярное поле акустического давления во временной области, $\mathbf{v}\,(x, y, z, t)$ – векторное поле колебательного ускорения. При рассмотрении тональных сигналов векторное поле плотности потока энергии в частотной области для фиксированной частоты f может быть выражено как

$$\hat{\mathbf{I}}\,(x, y, z, \omega) = \frac{1}{2}\mathcal{R}\left(\hat{p}\,(x, y, z, \omega)\,\overline{\hat{\mathbf{v}}\,(x, y, z, \omega)}\right)\,, \tag{136}$$

где $\omega = 2\pi f$ – циклическая частота. Вычисление колебательной скорости в частотной области описано в Главе 2.10.

Результаты моделирования векторного поля потока энергии отобра-

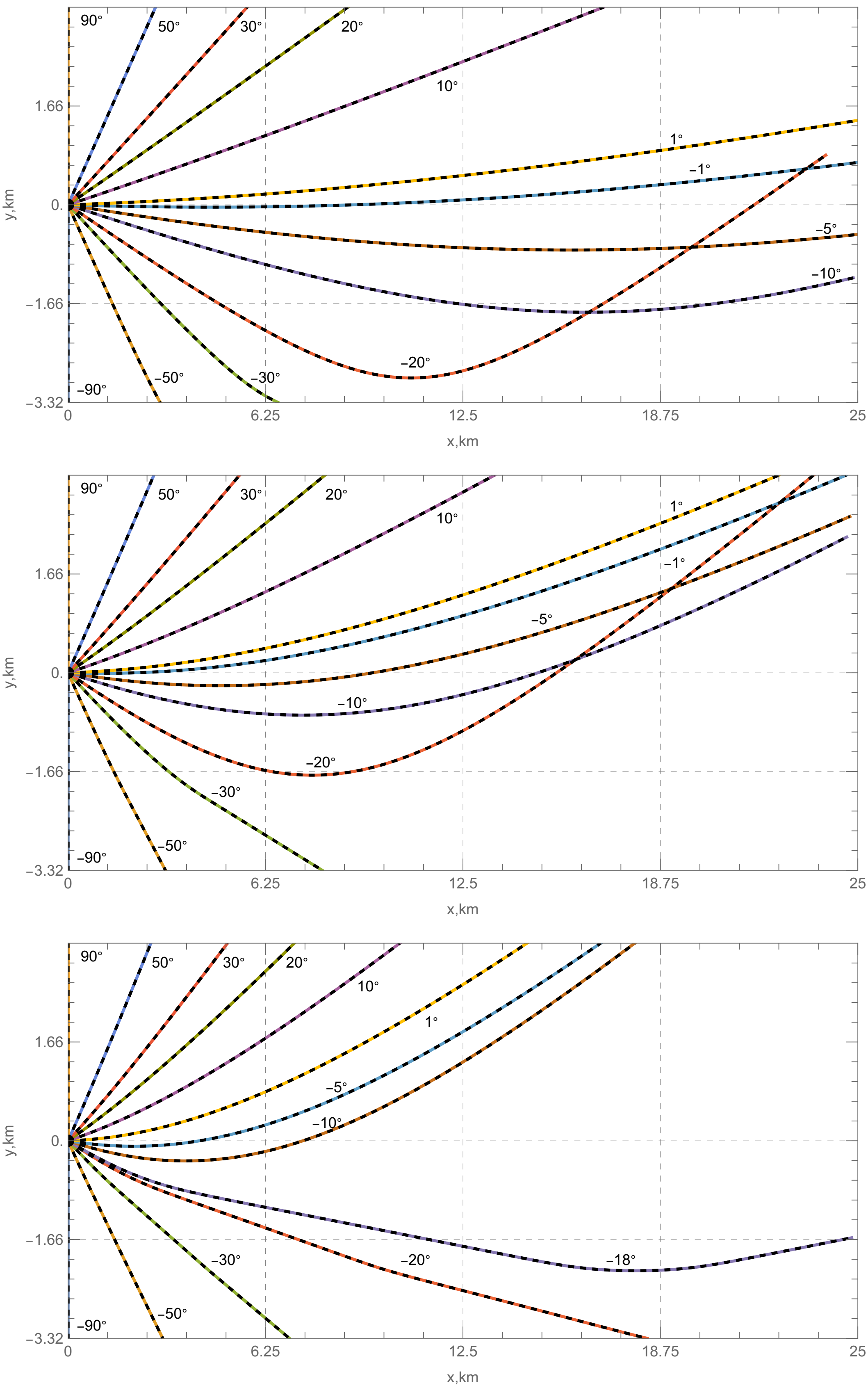


Рисунок 13 – Сравнение трассировки лучей путём численного решения системы (86) (сплошная кривая) и численного интегрирования (134) (пунктирная кривая) для трёх распространяющихся мод.

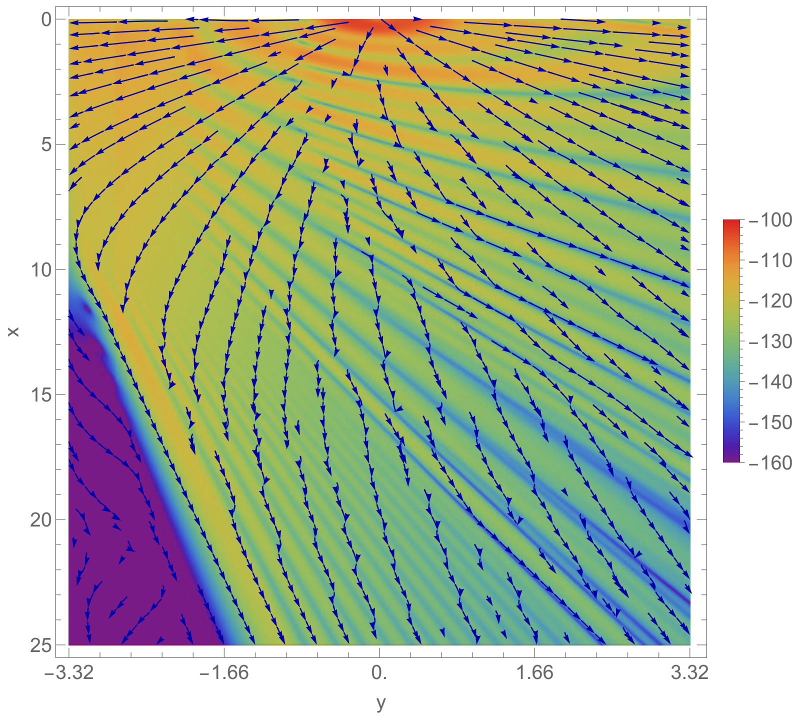


Рисунок 14 – Модуль и поток векторного поля плотности потока энергии на частоте 25 Гц в мелком море с подводным каньоном при $z = 30$ м.

жены на Рисунке 14. Как видно из рисунка при распространении звука в клиновидном волноводе звуковая энергия стремится в сторону увеличения глубины дна. При этом наблюдается относительно высокая скорость передачи энергии после отражения от мелководной части клина.

3.2.3.3 Моделирование распространения импульсных акустических сигналов

Рассмотрим задачу распространения импульсного акустического сигнала в клиновидном волноводе. Функция источника была выбрана следующим образом

$$f(t) = A\beta_n H_n^{(1)}\left(\frac{t - t_0}{\sigma}\right) e^{-\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2}, \tag{137}$$

где $A \in \mathbb{R}$ – параметр масштаба, t_0 – центральное время, σ – параметр ширины функции, $H_n^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода порядка n, а β_n

определено как

$$\beta_n = \begin{cases} \dfrac{k!}{n!}\,, & n = 2k\,, \\ \dfrac{k!\sqrt{4k+3}}{(2k)!\,(4k+2)}\,, & n = 2k+1\,. \end{cases} \tag{138}$$

Такой вид функции позволяет получить выражение для центральной частоты сигнала как

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sigma}\sqrt{2n+1}\,. \tag{139}$$

При моделировании были использованы следующие параметры функции источника

$$\begin{gathered} A = 2000\,, \quad t_0 = 0.3 \text{ с}\,, \\ \sigma = 0.021\,, \quad n = 21\,, \\ f_c = 50 \text{ Гц}\,. \end{gathered} \tag{140}$$

Графики функции и спектра источника отображены на Рисунке 15. При проведении моделирования был рассмотрен частотный диапазон $[13, 100]$, в модовом разложении были использованы 32 моды . Временной ряд импульса сигнала был вычислен в точке приёма, расположенной по координатам $x_r = 25000$ м , $y_r = 0$ м , $z_r = 30$ м. Сравнение результатов моделирования было проведено с решением методом изображений [129, 130]. Из результатов сравнения на Рисунке 16 видно, что решения показывают хорошую сходимость, при этом наибольшее отличие наблюдается в предвестнике, которое возникает из-за ограничений модового разложения при распространении на низких частотах на больших расстояниях.

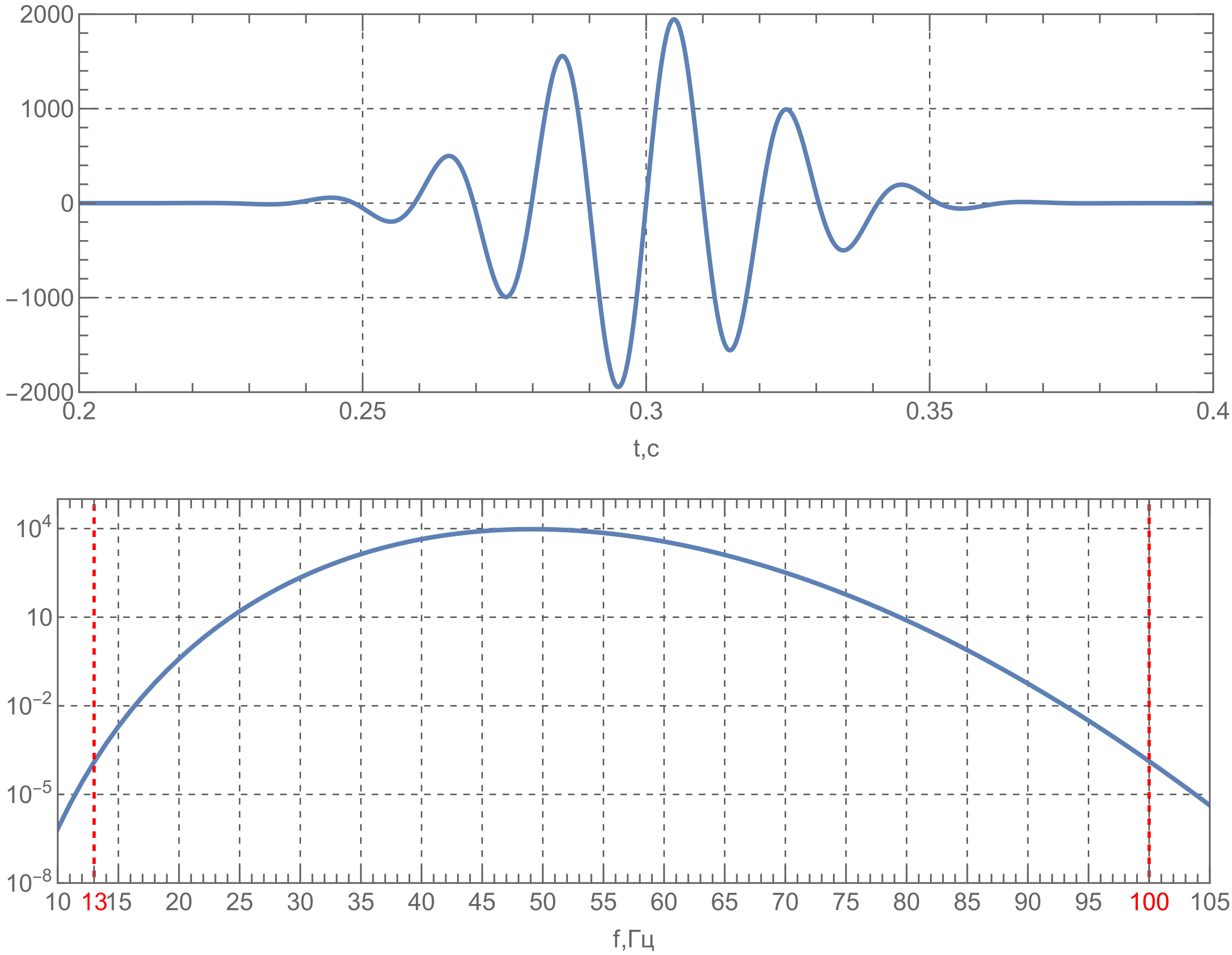


Рисунок 15 – Функция и спектр источника при моделировании распространения импульсных сигналов в клиновидном волноводе мелкого моря. Красной пунктирной линией отмечены границы рассматриваемых частот

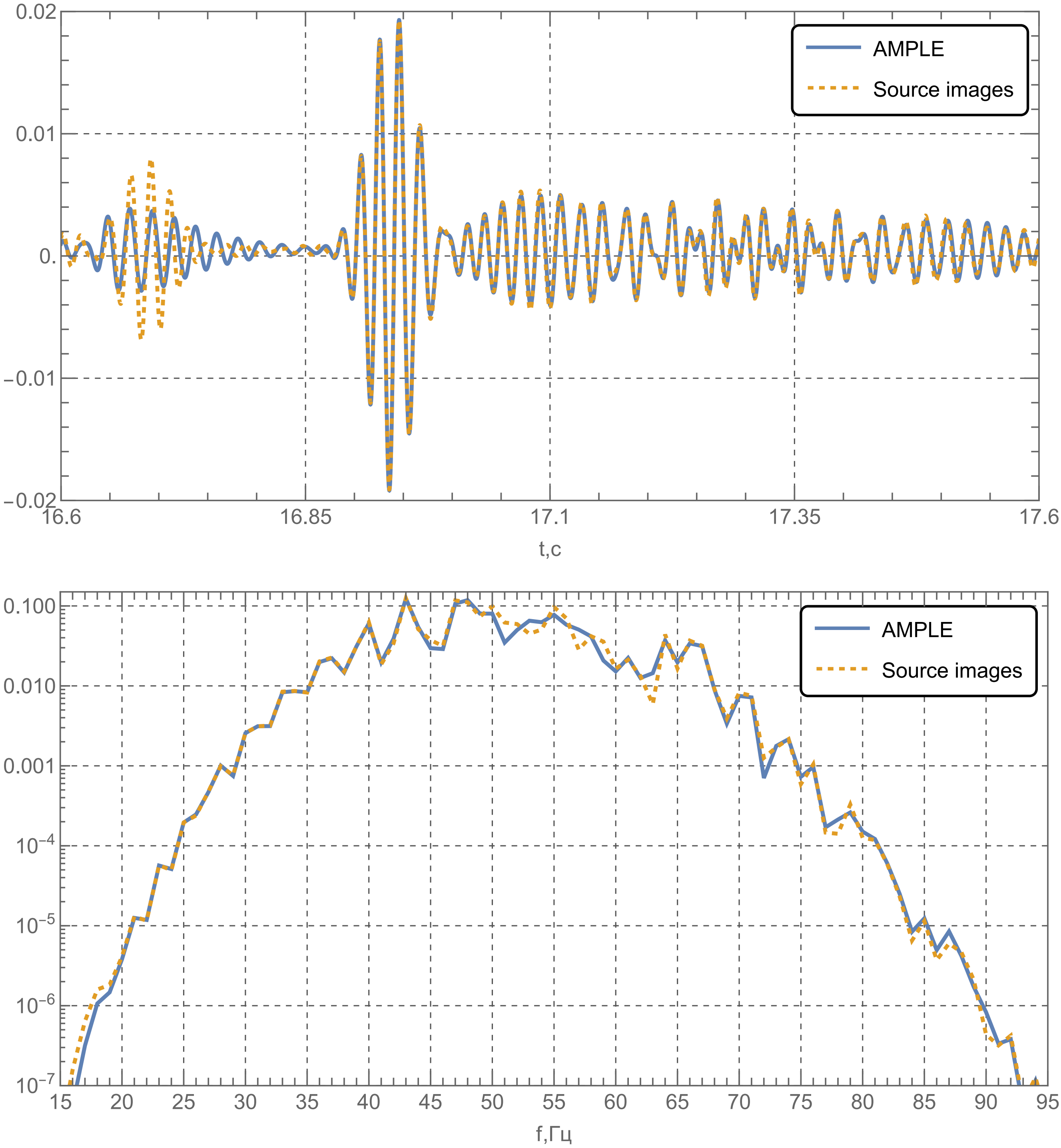


Рисунок 16 – Сравнение результатов вычисления временного ряда в приёмнике (сверху) и его спектра (снизу) при распространении импульсного акустического сигнала в клиновидном волноводе мелкого моря

3.2.4 Волновод с реальной батиметрией

В качестве последнего эксперимента было проведено моделирование распространения звуковых волн в волноводе с использованием реальных данных батиметрии, рельеф дна которого изображён на Рисунке 17. Также

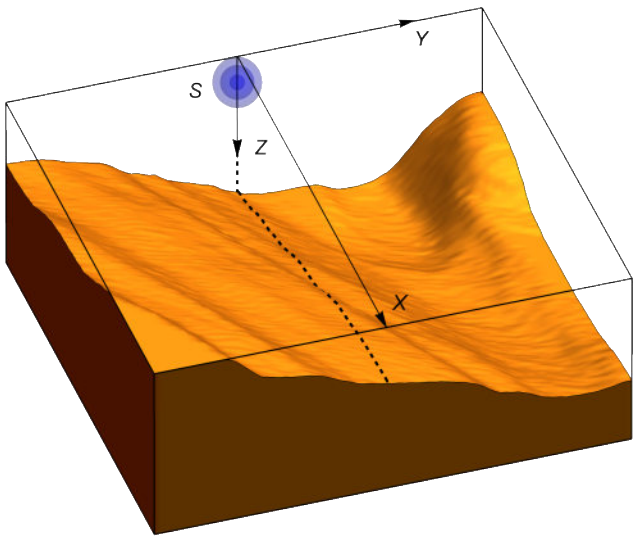


Рисунок 17 – Изображение волновода с реальной батиметрией

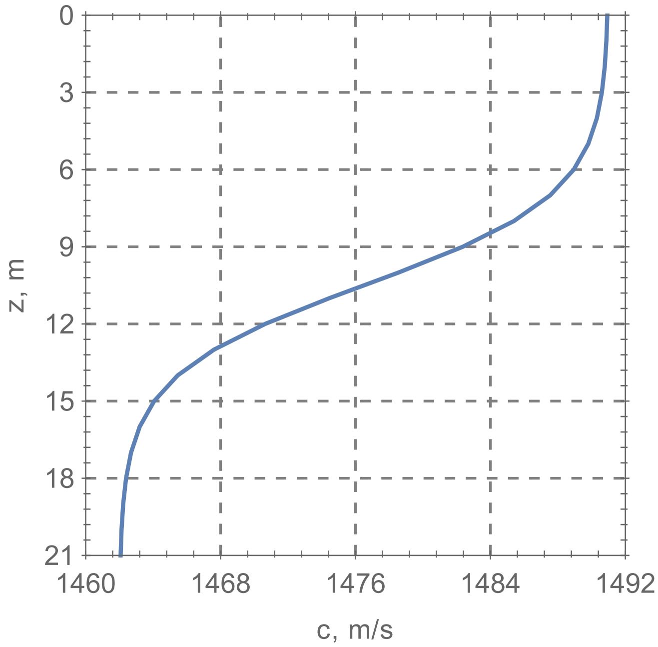


Рисунок 18 – Изображение профиля скорости звука

был использован профиль скорости звука в воде, изображённый на Рисунке

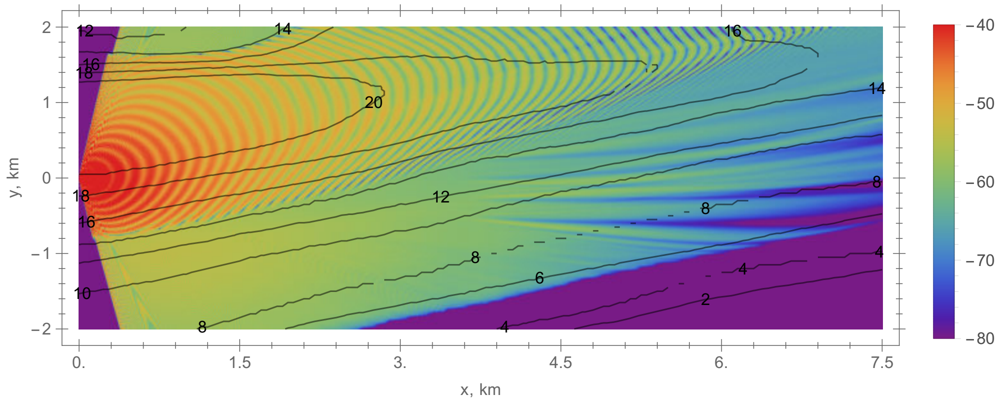
18 и задаётся формулой

$$c\,(z) = -\frac{29}{1 + e^{-\left(\frac{12z}{21} - 6\right)}} + 1491\,. \qquad (141)$$

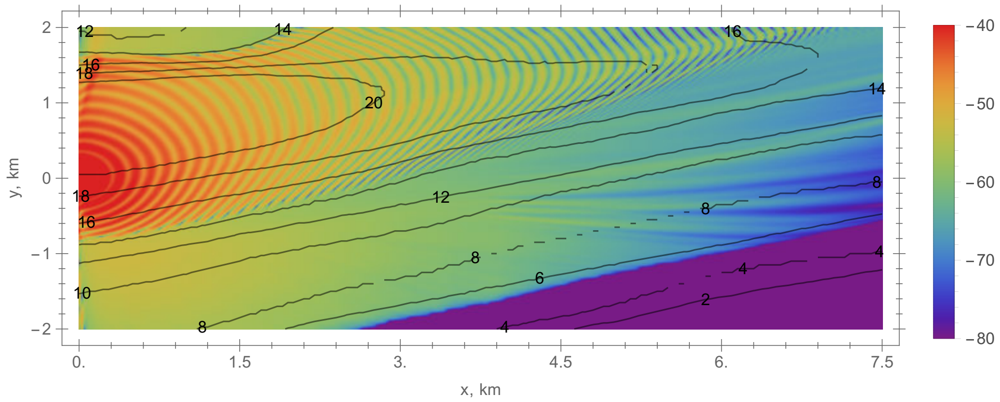
При проведении эксперимента было вычислено акустическое поле источника, расположенного на глубине $z = z_s = 4$ м, и были использованы следующие параметры

$$\begin{gathered} f = 150\ \text{Гц}\,, \qquad p = 11\,, \qquad \alpha = \pm 89.95^\circ\,, \\ x_0 = 50\ \text{м}\,, \quad x_1 = 7.5\ \text{км}\,, \quad n_x = 7500\,, \\ y_0 = -2\ \text{км}\,, \quad y_1 = 2\ \text{км}\,, \quad n_y = 4001\,. \end{gathered} \qquad (142)$$

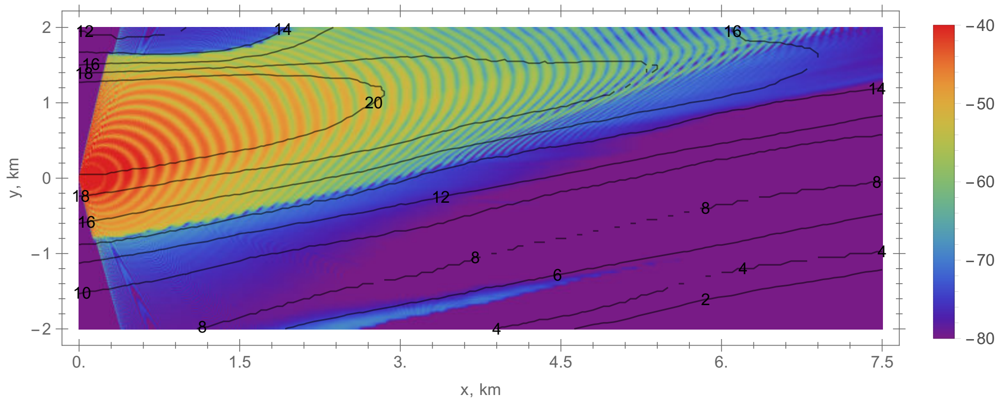
Время работы программы составило 59.756 с. Результаты вычислений показаны на Рисунке 19, из которого видно, что решение ШМПУ существенно уступает решению, полученному методом SSP с большим порядком аппроксимации Паде. Также можно заметить, как звук фокусируется в области с большей глубиной.



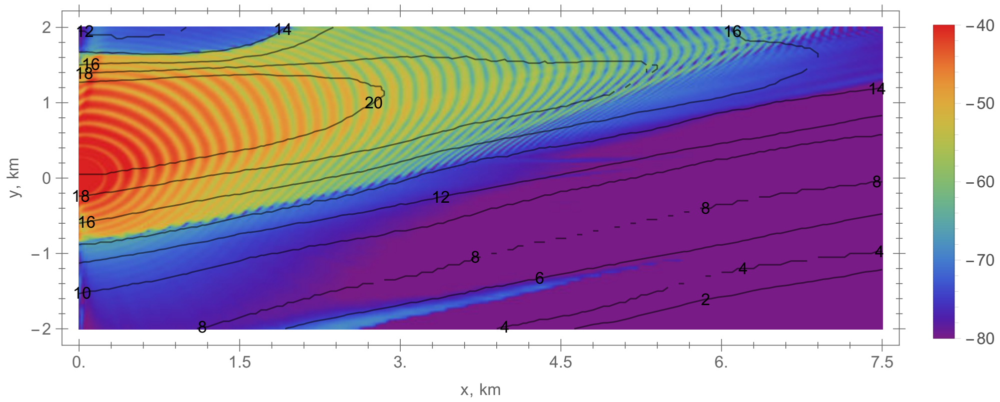
(a) Решение ШМПУ, $z = 4$ м



(b) SSP, $z = 4$ м



(c) Решение ШМПУ, $z = 20$ м



(d) SSP, $z = 20$ м

Рисунок 19 – Акустическое поле (в дБ отн. 1 м.) в волноводе с реальной батиметрией

3.2.5 Результаты вычислительных экспериментов

В результате вычислительных экспериментов было показано, что разработанная численная схема с применением аппроксимации Паде произвольного порядка и лучевых начальных условий работает корректно и может быть использована при моделировании распространения звука в сложных неоднородных океанических волноводах. При этом новый метод показывает значительно более гладкое и точное поле вблизи источника, а вдали от него учитывает волны исходящие под большими углами. Также в некоторых задачах более вычислительно затратные методы могут быть заменены разработанным методом, использование которого требует гораздо меньше вычислительных затрат.

3.3 Выводы к третьей главе

В данной главе диссертации представлена программная реализация математических методов, описанных во второй главе, а также приведены модельные примеры демонстрирующие корректность реализованных методов. Комплекс программ реализован на языке программирования C++ с использованием современных методов написания программ и библиотек. Программа AMPLE позволяет выполнять моделирование распространения звука в трёхмерных волноводах мелкого моря, расчёт временных рядов в точках приёма при распространении импульсных акустических сигналов и значений уровня звукового воздействия, трассировку лучей, соответствующих вертикальным модам, а также вычисление векторного поля колебательных ускорений. Конфигурация программы выполняется с использованием единственного текстового файла в формате JSON, содержащего параметры среды, батиметрии и гидрологии, сетки вычислительной области, координаты приёмников, свойства начальных условий и численного решения, параметры источника, такие как частота, функция или спектр, параметры вычисления нормальных мод или их предрасчитанные значения. Результаты работы программы выводятся в отдельную папку и содержат информацию о проделанных вычислениях и использованных параметрах, а также бинарные или тестовые файлы содержащие значения моделированных величин. Код программы размещён в открытом доступе, что упрощает его использование в различных проектах. Всё это позволяет существенно сократить время, требуемое для подготовки и интерпретации вычислений.

Валидация комплекса программ была выполнена на примере различных модельных задач. Во-первых было установлено полное соответствие полученного решения аналитическому в случае волновода мелкого моря с плоским дном, а также показано влияние порядка аппроксимации Паде и различных начальных условий. Далее было проведено сравнение с решением методом виртуальных источников на примере распространения звука в волноводе мелкого моря с подводным каньоном. Было показана высокая согласованность решений, при этом время, затраченное на работу программы AMPLE составляет несколько десятков секунд. Следующим было проведено моделирование распространения звука в клиновидном волноводе мелкого моря. Сравнение решения, полученного с использованием программы AMPLE, проводилось с решением, полученным методом изображений. Было показано, что, даже несмотря на адиабатическую природу модового параболического уравнения, решения полностью совпадают. Последним было проведено моделирования распространения звука в волноводе с реальной батиметрией, с целью демонстрации влияния апертуры уравнения на получаемый результат. Таким образом, было показано, что разработанная программа показывает корректные результаты расчётов, при этом не требуя значительного подбора параметров моделирования, по сравнению с, например, методами, основанными на трассировке лучей и гауссовых пучков, и имея существенно быструю скорость вычислений, по сравнению с, например, методами трёмерного параболического уравнения.

Разработанный комплекс программ также может быть улучшен путём расчёта модовых функций для диапазона глубин, нежели на горизонтальной сетке, что позволит далее сократить время вычислений в обширном классе задач. Проведение вычислений на графическом процессоре также позволит сократить время работы программы. Класс задач, подходящих для использования разработанной программой, может быть существенно расширен путём учета взаимодействия мод.

Результаты третьей главы опубликованы в работах и представлены на конференциях [48, 50, 41, 132].

Глава 4

Моделирование акустических полей в задачах оценки уровней антропогенных сигналов в океане

В рамках предыдущей главы была проведена валидация разработанных в данной работе методов моделирования распространения звука и программного комплекса, основанного на этих методах. Настоящая глава посвящена применению этих методов к реальным задачам акустического моделирования, а именно оценки уровней акустических сигналов антропогенного происхождения. Отличительной чертой этих задач является использованием близких к реальным гидрологии, батиметрии и прочих параметров среды, а также моделирование широкополосных акустических сигналов.

Первым рассматривается моделирования распространения акустических сигналов, создаваемых в результате прохода одиночного грузового судна в акватории порта Ванкувера недалеко от острова Сатурна. Эта задача была предложена в рамках JAM Workshop [133, 134], посвящённому исследованию применимости различных методов моделирования распространения звука на множестве модельных и реальных задач. В рамках данного сценария перед участниками была поставлена задача моделирования распределения акустической энергии по децидекадным частотным полосам. В качестве информации о среде участникам были предоставлены батиметрия рассматриваемой акватории, профили скорости звука в воде за три различных месяца и оценочные параметры структуры для. Во время работы над этой задачей была исследована применимость предложенных методов моделирования распространения звука, а также предложен алгоритм оценки параметров дна увеличения качества результатов моделирования.

Следующим рассматривается моделирование уровней звукового давления, связанных с прохождением сейсморазведочных импульсов в мелководной части северо-восточного шельфа острова Сахалин. В рамках данной задачи требуется провести оценку уровней звукового воздействия (SEL) во всей акватории, на основании импульсного сигнала, записанного в одной из точек этой акватории. При проведении моделирования использованы параметры батиметрии и гидрологии, полученные в результате натурных измерений. Сравнение результатов моделирования проводится с результатами, полученными с использованием узкоугольного модового параболического уравнения с учётом взаимодействия мод, а также с результатами натурных измерений, выполненных в удалённой точке акватории.

4.1 Моделирование акустического поля одиночного судна

В данном разделе рассматривается задача моделирования акустического поля, создаваемого морским сухогрузом, которая была предложена участникам Cambridge Joint Industry Programme Acoustic Modelling (JAM) workshop [133, 134]. В рамках данной задачи морское судно движется в зоне фиксации подводной станции акустического мониторинга, расположенной недалеко от острова Сатурна в порту Ванкувера [135] (см. Рис. 20). В задаче известны траектория движения судна, эффективный спектр источника, пересчитанный для эквивалентного монополя, а также информация о среде, включающая батиметрию для рассматриваемой акватории, среднемноголетние данные о профиле скорости звука за три месяца, и некоторые ограниченные данные о геоакустических параметрах донных слоёв. Задача состояла в моделировании уровней звука в децидекадных полосах [136, 137] на различных расстояниях от судна до станции мониторинга. Результаты измерений, полученных на станции мониторинга, также были получены от

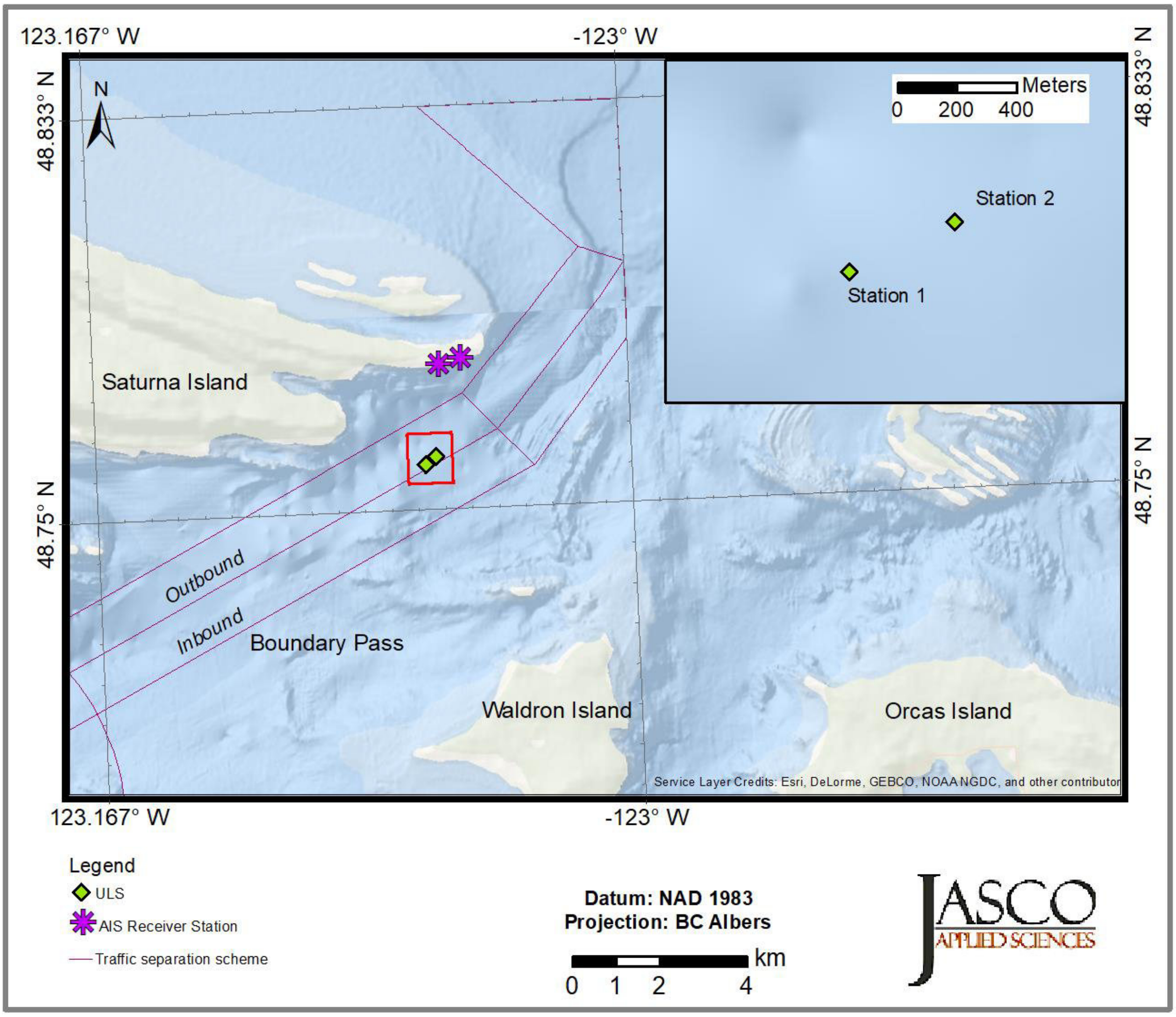


Рисунок 20 – Область проведения измерений и положение станций мониторинга акустического поля, рисунок предоставлен Ли Чжичжэнь и Грэм Ворнер (JASCO Applied Sciences).

организаторов для валидации результатов моделирования.

Для решения данной задачи был применён комплекс программ AMPLE, разработанный в рамках данной работы (см. Гл. 3), основанный на численном решении модовых параболических уравнениях (см. Гл. 2.1). Использование такого метода обусловлено тем, что он позволяет проводить моделирование распространения звука с учётом трёхмерных особенностей волновода, что позволяет провести исследование трёхмерных эффектов распространения акустического импульса, производимого морским судном.

Во время работы над поставленной задачей было выяснено, что невозможно достичь удовлетворительного согласия между данными натурных измерений и результатами моделирования при использовании параметров дна, представленными в задаче. Для преодоления этой проблемы была проведена оптимизация геоакустических параметров дна с целью достичь большего согласия распределения уровней звукового давления в ближайшей точке траектории судна к станции мониторинга, и затем использовать полученные параметры модели дна при моделировании звукового давления вдоль всего пути проходимого судном. Предполагается, что такой оптимизационный подход имеет практический смысл для применения в других прикладных задачах.

Другой трудностью, возникшей при проведении моделирования, является тот факт, что в задаче дана единственная точка приёма (то есть станция мониторинга), в то время как позиция источника постепенно изменяется. Очевидно, полное трёхмерное широкополосное моделирование звукового поля для каждой позиции источника является необозримой задачей даже для самых эффективных программ. По этой причине был использован принцип взаимности [88], и трёхмерное акустическое поле было рассчитано для всех рассматриваемых частот, считая позицией источника точку установки станции мониторинга. Таким образом, требуется вычисление лишь одного звукового поля для получения уровней акустического поля вдоль всего пути судна. Использование данного подхода должно происходить с большой осторожностью, так как в том случае если в рассматриваемой области имеют место сильные течения, в волновые уравнения должны быть внесены поправки, чтобы учесть эффекты распространения в движущейся среде. В то же время, использованный метод должен показать приемлемые результаты, если проекция вектора скорости течения на прямую, соединяющую источник и приёмник, достаточно мала.

4.1.1 Описание акватории и данных мониторинга

Как было сказано ранее, рассматривается задача прохода сухогруза мимо системы гидрофонов, расположенных по прямой около острова Сатурна в порте Ванкувера. Траектория судна относительно приёмной станции была получена с использованием системы автоматической идентификации (AIS). Полученный спектр источника был рассчитан автоматической системой

(JASCO PortListen), которая определяет уровни эффективного точечного источника соответствующего судну, внутри окна задаваемого азимутальным углом в $\pm 30^\circ$ относительно направления гидрофон-судно. Уровни источника, полученные в результате прохождения единственного судна были использованы для построения и последующего анализа зависимости SPL (Sound Pressure Level, уровень акустического давления) от расстояния в децидекадных частотных полосах с центральными частотами в пределах от 10 Гц до 250 кГц. Системой PortListen были вычислены потери на распространение от гидрофона до ближайшей точки траектории судна с использованием волнового уравнения, в предположении о том, что глубина источника равна 6.2 м, что является 70% осадки судна на момент измерений. При этом модель и параметры сухогруза не были известны, за исключением длины и ширины, считавшихся приблизительно равным 182 и 30 м соответственно. Дополнительные детали, относящиеся к автоматическому анализу спектра источника, проводимому PortListen, могут быть найдены в [138]. При проведении валидации было выполнено сравнение результатов моделирования с усредненным по частоте квадратом давления $p^2_{ddec}(f)$, и также акустической экспозицией $E_{p,ddec}(f)$ в децидекадных полосах, измеренных подводной станцией акустического наблюдения с использованием окна наблюдений по времени равным 1 с. на расстояниях до 3.3 км. от гидрофона (определение соответствующих акустических величин дано ниже).

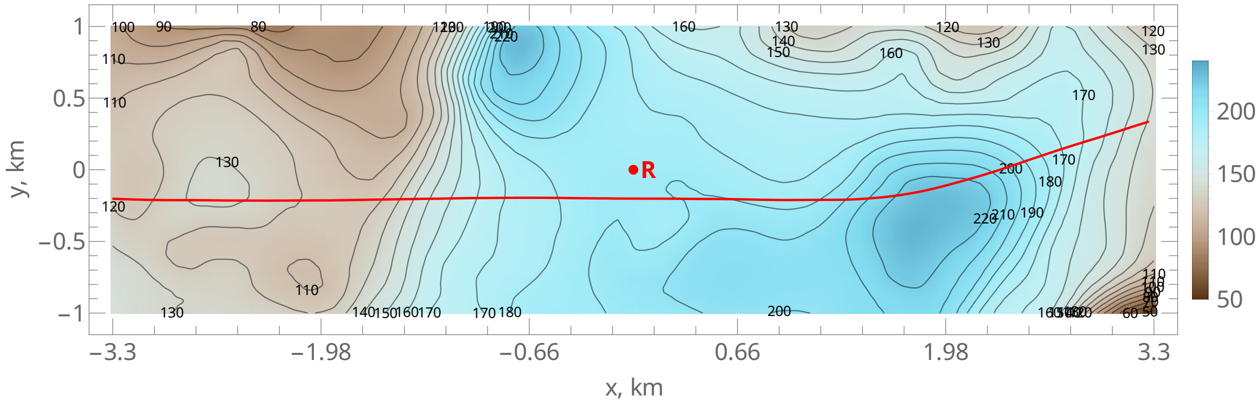


Рисунок 21 – Карта глубин акватории вблизи станции мониторинга и траектория прохода судна. Ось x ориентирована приблизительно параллельно направлению движения сухогруза. Позиция приёмника отмечена точкой R.

Батиметрия показана на Рис. 21. Для проведения вычислений была введена прямоугольная система координат с центром в точке, где был расположен приёмник, и осью x ориентированной приблизительно параллельно направлению движения сухогруза. Дно в данной области состоит из верхнего слоя осадков (состоящих в основном из мелкого песка), расположенного над слоём коренной породы (значения геоакустических параметров дна, полученные от геологической службы порта Ванкувера, отображены в Таблице 11).

Среднемноголетние профили скорости звука в море Селиш представлены на Рис. 22 (стоит отметить, что эксперимент проходил в ноябре, но данные за октябрь и декабрь также были доступны).

Спектр эффективного монополя, соответствующего судну, показан на Рис. 23. Стоит отметить, что система Port Listen [139] не позволяет получить какую-либо информацию о направленности источника.

Целью моделирования являлось воспроизведение распределения акустической энергии по децидекадным частотным полосам $E_{p,ddec}(f)$, определяемым как

$$E_{p,ddec}(f_c,d) = 2\int_{f_1}^{f_2} |P(f,d)|^2 df\,, \qquad (143)$$

где f_c – центральная частота полосы $[f_1,f_2]$, $P(f,d)$ – спектр, вычисленный

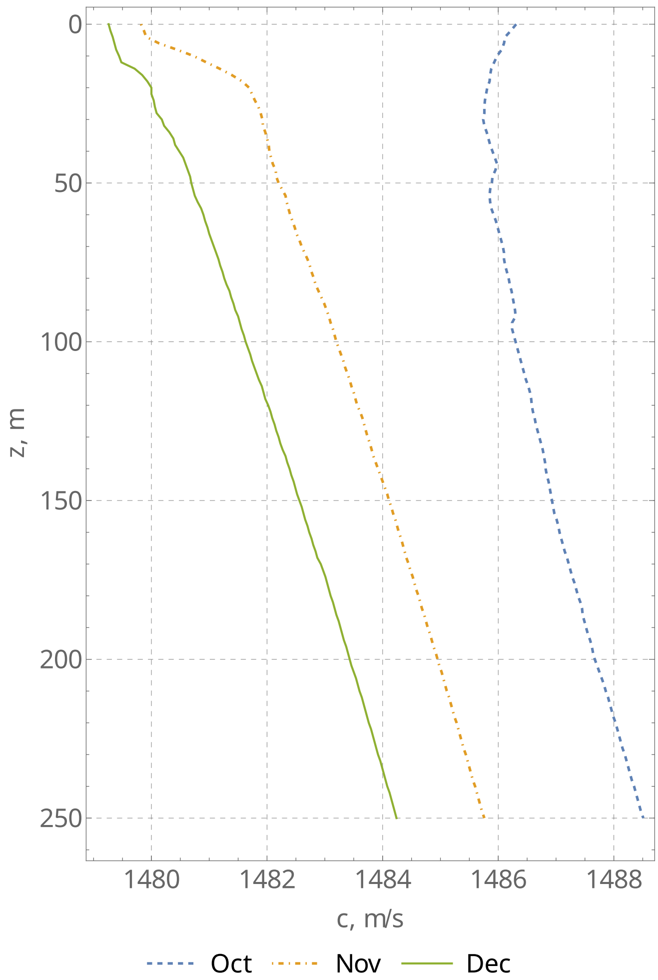


Рисунок 22 – Среднемноголетние профили скорости звука в море Селиш.

в приёмнике во временном окне шириной 1 секунда для заданной точки на траектории движения сухогруза, и d – расстояние от судна до гидрофона измерительной системы. Другим важным значением является $\bar{p^2}_{ddec}(f)$ в ближайшей точке прохода судна, вычисляемое по формуле

$$\bar{p^2}_{ddec}(f) = {}^{E_{p,ddec}(f_c, d_{CPA})}/_{T}, \tag{144}$$

где T – размер временного окна (здесь и далее $T = 1$ секунда), и d_{CPA} – расстояние от судна до измерительной системы в ближайшей точке прохода. Так как программа AMPLE использует модель, основанную на нормальных модах, были рассмотрены частоты, соответствующие диапазону EC2 (8.91 – 891 Гц). В задачах такого типа принято, чтобы результаты моделирования были усреднены по децидекадным частотным полосам, с тем, чтобы исключить интерференционные эффекты.

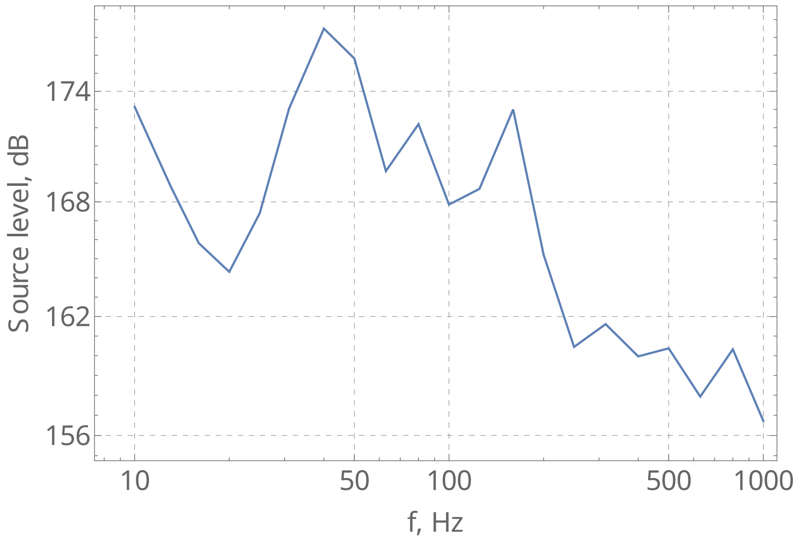


Рисунок 23 – График зависимости распределения энергии спектра источника от частоты, производимого сухогрузом (отн. 1 μPa^2 m^2) и измеренного в ближайшей точке прохода подводной акустической станцией.

4.1.2 Проведение вычислений

Все вычисления были проведены на равномерной прямоугольной сетке $x \in [20, 3320]$, $y \in [-1000, 1000]$ с размерами шагов $\Delta x = 1$, $\Delta y = 0.125$, как в положительном, так и в отрицательном направлении оси x от источника, расположенного на глубине $z_s = 192.7$. Согласованный поглощающий слой был использован для искусственного ограничения вычислительной области вдоль оси y. Акустические моды были вычислены с использованием библиотеки CAMBALA, которая использует конечно-разностную дискретизацию задачи Штурма-Лиувилля (14) (вычисления были проведены с использованием шага по глубине $\Delta z = 0.1$м.)

Во время вычислений было использовано 20 потоков выполнения. Акустическое поле записывалось в файл для более грубой сетки $n_x = 331$, $n_y = 321$, $n_z = 11$. Значения величины $E_{p,ddec}(f)$ затем были получены с использованием скрипта на языке Wolfram Mathematica (Вольфрам математика).

Для проведения моделирования распространения акустического сиг-

Диапазон частот Гц			Толщина слоя осадков, м.	Количество мод	Время выч. мин.
f_0	f_1	Δf			
8	24	1	1200	8	20
25	99	1	1200	28	220
100	298	2	800	80	530
300	892	4	600	160	1470

Таблица 10 – Параметры среды, используемые при вычислении для разных диапазонов частот

нала, создаваемого судном, был использован принцип взаимности. А именно, источник был расположен на глубине 129.7 м. на $x = 0, y = 0$ (позиция, в которой на самом деле расположена система мониторинга) и было проведено вычисление поля акустического давления для всех частот из диапазона от 8 Гц. до 891 Гц. в области -3.3 км $\leq x \leq 3.3$ км, 1 км $\leq y \leq 1$ км при $z = 6.2$ м, которая является эффективной глубиной источника звука (см. прямоугольную систему координат на Рис. 21). Другими словами, более эффективным является моделирование распространения звука от приёмника к источнику (здесь и далее это называется взаимным моделированием) нежели наоборот (прямое моделирование). После вычисления горизонтальных срезов акустического поля для каждой частоты, значения звукового давления были интерполированы на все точки пути движения судна.

Изначально авторами сценария было предложено считать параметры среды независящими от расстояния (то есть однородными по x, y). Действительно, такое упрощение может быть приемлемо для расстояний порядка 3 – 4 км, для которых эффекты горизонтальной рефракции обычно считаются пренебрежимыми. Было решено, однако, что исследование степени влияния таких эффектов на результаты моделирования является интересной задачей в контексте данного сценария. Таким образом, все вычисления были проведены как с использованием полностью трёхмерного комплекса программ AMPLE (для которого псевдодифференциальные модовые параболические уравнения были решены в обоих направлениях: положительном и отрицательном по оси x), так и с использованием простого двумерного аналога (для которого вычисления выполняются существенно быстрее, в приблизительно 400 раз).

Результаты вычислений с параметрами дна, полученными от авторов сценария, оказались скорее неудовлетворительными. Даже в точке ближайшего прохода, уровни звукового давления $p^2_{ddec}(f)$, полученные в результате моделирования, существенно превышали результаты измерений (см. Рис. 24). Разница становится ещё более заметной при сравнении зависимостей уровней звукового давления на графике по расстоянию и частоте, как показано на Рис. 25. Несмотря на то, что высокие уровни в смоделированном поле могут быть частично объяснены тем, что программа AMPLE не учитывает наличие сдвиговой упругости в дне (что в большинстве случаев приводит к увеличению потерь на распространение по сравнению с жидким дном с теми же значениями скоростей продольных волн), наблюдаемая разность является слишком большой, чтобы она могла быть объяснима лишь этим эффектом. Другими возможными объяснениями такого отличия могут быть неточность информации о геоакустических параметрах дна, несогласованность между фактическими гидрологическими параметрами на момент проведения измерений и среднемноголетними данными профилей скорости звука, и неподходящее представление протяжённого источника звука в виде бесконечного малого монополя (то есть аппроксимация в дальнем поле). Стоит также упомянуть, что высокая интенсивность звука судна, полученного в результатах моделирования, по сравнению с данными (по крайней мере частично) может быть объяснена сильным акустическим контрастом поперёк интерфейса вода-дно и несколько меньшим чем в действительности затуханием в слое осадков. В то время как невозможно провести правильную корректировку вида направленности источника как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскости без проведения дополнительных измерений, параметры среды могут быть уточнены с использованием уже имеющихся данных.

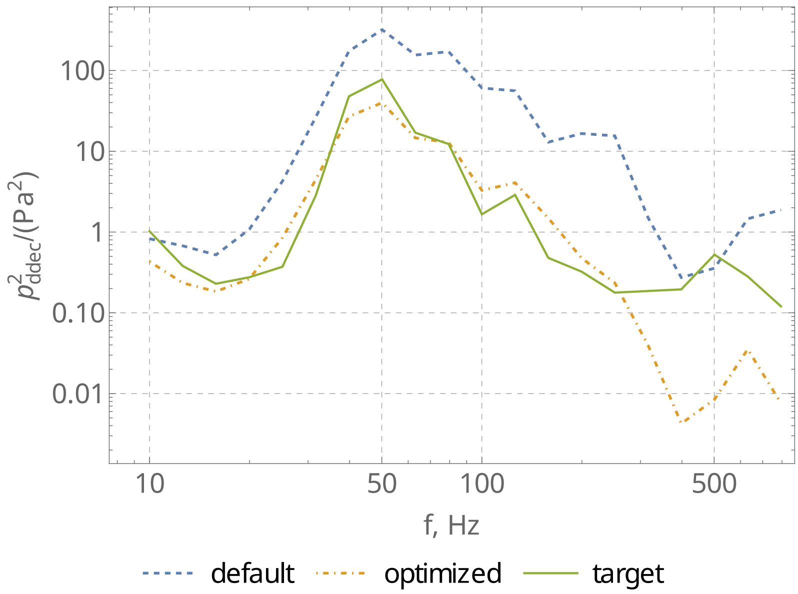
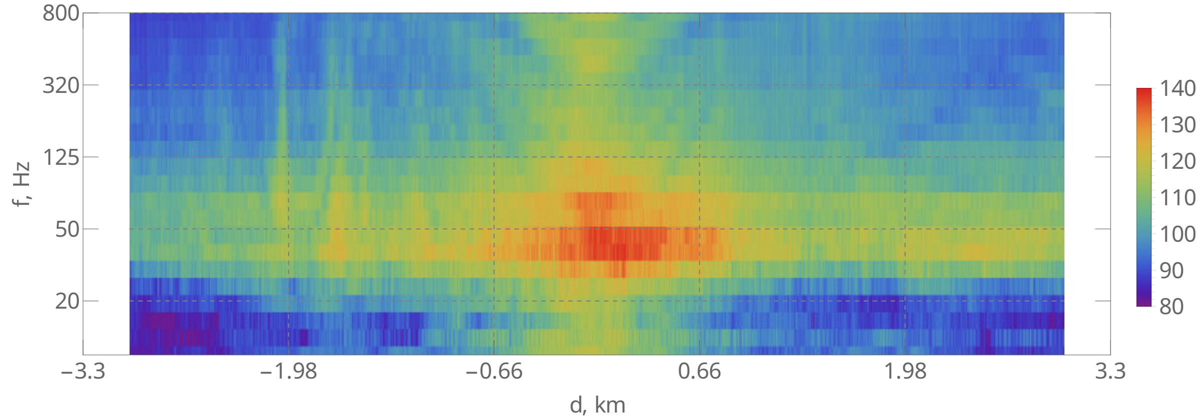
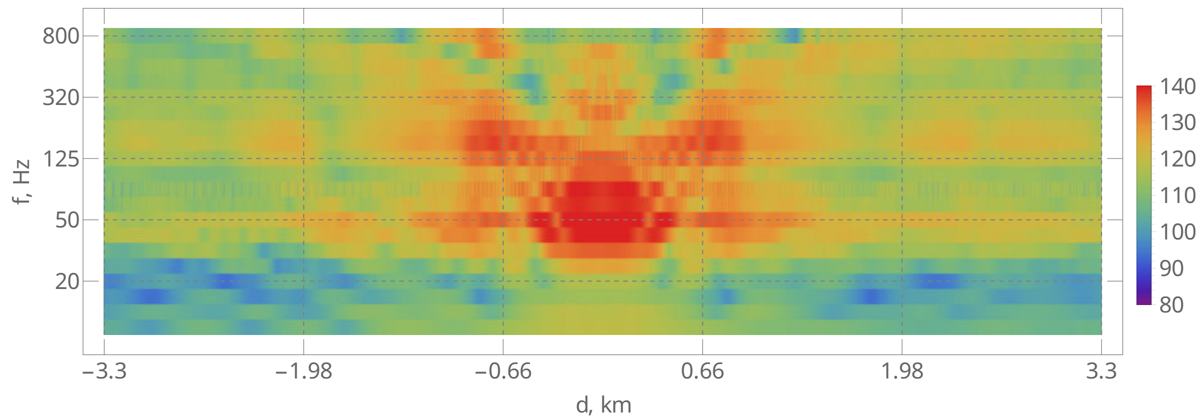


Рисунок 24 – График зависимости распределения уровней звукового давления от частоты в точке ближайшего прохода судна, полученного из данных измерений (сплошная линия), и из результатов моделирования с использованием исходных (пунктирная линия) и оптимизированных (пунктирная линия с точками) значений параметров среды.

Некоторые свойства поля могут быть проанализированы, путём рассмотрения его вертикальных срезов (то есть в плоскости x, z), показанных на Рис. 26 для частоты в 400 Гц (в качестве примера). Типичной характеристикой интерференционной картины является то, что максимум интенсивности поля около поверхности океана расположен на расстоянии в несколько сотен метров от источника (конечно, точно такая же ситуация наблюдалась бы при проведении прямого моделирования). Такая интерференционная структура поля формирует боковые лепестки в распределении шума на Рис. 25 (b), то есть области высокой интенсивности звука, расположенные под углом в примерно $\pi/4$ в координатах (r, f). Несмотря на то, что похожие признаки могут быть найдены на Рис. 25(a) в результате тщательного рассмотрения (и, на самом деле, они являются естественными для рассматриваемых глубин источника и приёмника), соответствующая



(a) Данные



(b) Моделирование

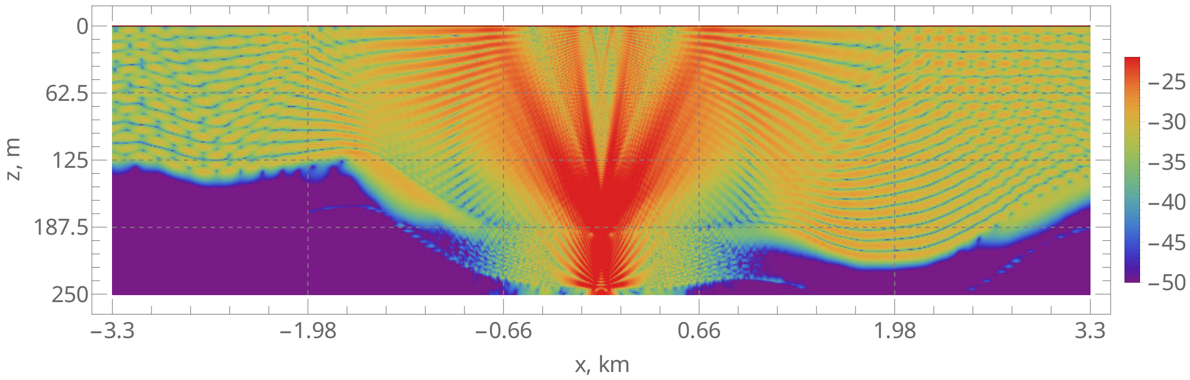
Рисунок 25 – Уровни звукового давления (в дБ) для прохождения судна, полученные из данных измерений (a) и результатов трёхмерного моделирования с использованием параметров, предложенных авторами сценария (b).

им интенсивность звука является существенно меньшей в данных натурных измерений.

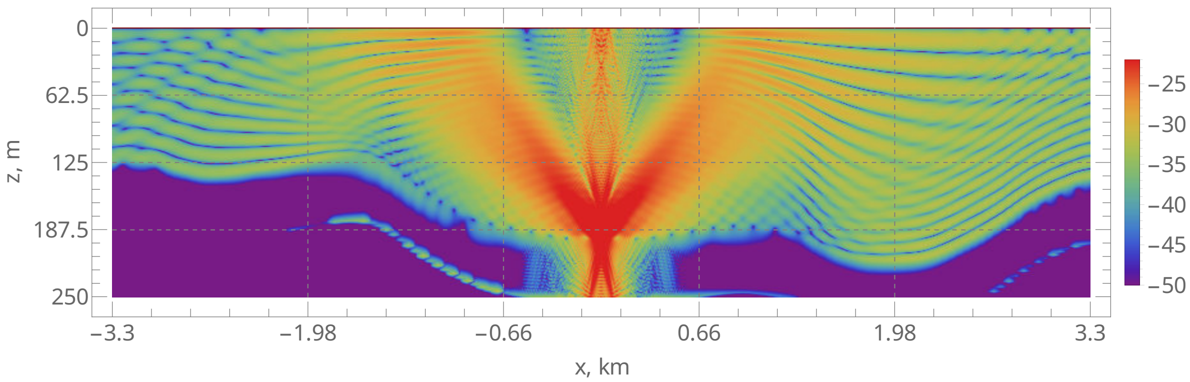
Конечно, такое различение отчасти может быть связано с нетривиальной структурой диаграммы направленности источника. С другой стороны, однако, это может быть устранено корректировкой параметров среды (особенно для низких частот, которые в данном случае переносят большую часть энергии источника).

4.1.3 Оптимизация параметров среды

Так как не было достигнуто приемлемого согласования между данными измерений и результатами моделирования с использованием геоаку-



(a) Исходные параметры



(b) Оптимизированные параметры

Рисунок 26 – Вертикальный срез акустического поля для частоты f = 400 Гц (в Дб. отн. 1 м. от источника) с использованием исходных параметров среды (a) и их значений, полученных в результате оптимизации (b).

стических параметров, определённых по информации о строении дна, было решено провести их оптимизацию, используя данные в ближайшей точке прохода (для всей полосы частот EC2) в качестве опорного решения.

Оптимизация была ориентирована на изменение параметров дна, а именно толщину, скорость звука, плотность и коэффициент поглощения в слое осадков, а также скорость звука в корневой породе. Так как дифференцирование горизонтальных волновых чисел и модовых функций является чрезмерно затратной операцией, было принято решение использовать неградиентный метод, известный как байесовская оптимизация [140], которая позволяет быстро исследовать целевую функцию и найти значение близкое к локальному максимуму, используя лишь небольшое количество вычислений целевой функции. Последнее является особенно важным, так как вычисление мод требует существенных временных затрат. Алгоритм байесовской оптимизации может быть кратко описан следующим образом

1. Для заданной целевой функции $f : \Theta \mapsto \mathbb{R}$ получить априорное распределение $p\left(f|\theta \in \Theta\right)$, которое описывает ожидаемое поведение функции в зависимости от параметра θ. Здесь Θ является множеством всех возможных комбинаций оптимизируемых параметров (то есть все возможные комбинации параметров дна).

2. Вычислить $n \in \mathbb{N}$ значений целевой функции $y_i = f\left(\theta_i\right)$ в случайно выбранных точках $\{\theta_i\}_{i=1}^{n}$.

3. Получить апостериорное распределение $p\left(f|\theta_1, \ldots, \theta_n, y_1, \ldots, y_n\right)$.

4. Для каждого $j = \overline{1, m}\,, m \in \mathbb{N}$ выполнить

   a) Получить следующую лучшую точку θ_{n+j} путём максимизации некоторой функции оценки $q : \Theta \mapsto \mathbb{R}$, которая присваивает потенциальным точкам скор (score) основываясь на их предполагаемой возможности способствовать процессу оптимизации при текущем апостериорном распределении.

   b) Вычислить значение целевой функции в новой найденной точке $y_{n+j} = f\left(\theta_{n+j}\right)$.

   c) Обновить апостериорное распределение $p\left(f|\theta_1, \ldots, \theta_{n+j}, y_1, \ldots, y_{n+j}\right)$.

5. Выдать максимальное значение $y_{max} = \max\limits_{i=\overline{1,n+m}} y_i$ и соответствующую ему точку $\theta_{max} = \arg\max\limits_{\theta_i, i=\overline{1,n+m}} y_i$ в качестве результата работы алгоритма.

Наиболее часто используемым априорным распределением является таковое из Гауссовского процесса [140], которое принимает следующий вид

$$\begin{bmatrix} f(\theta) \\ f(\theta_1) \\ \vdots \\ f(\theta_n) \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \begin{bmatrix} k(\theta,\theta) & k(\theta,\theta_1) & \dots & k(\theta,\theta_n) \\ k(\theta_1,\theta) & k(\theta_1,\theta_1) & \dots & k(\theta_1,\theta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(\theta_n,\theta) & k(\theta_n,\theta_1) & \dots & k(\theta_n,\theta_n) \end{bmatrix}\right), \tag{145}$$

и в свою очередь является многомерным нормальным распределением $\mathcal{N}$ со средним μ и матрицей ковариации $\{k(\theta_i,\theta_j)\}_{i,j}$, где $k : \Theta \times \Theta \mapsto \mathbb{R}$ является так называемым ядром или функцией ковариации. Таким образом, апостериорное распределение может быть выражено как

$$\begin{aligned} p(f(\theta)|\theta_1,\dots,\theta_n, f(\theta_1),\dots,f(\theta_n)) &\sim \mathcal{N}(m, s^2) \\ m &= \{k(\theta,\theta_i)\}_{i=1}^n \cdot \left(\{k(\theta_i,\theta_j)\}_{i,j=1}^n\right)^{-1} \cdot \{f(\theta_i)\}_{i=1}^n \\ s^2 &= k(\theta,\theta) - \{k(\theta,\theta_i)\}_{i=1}^n \cdot \left(\{k(\theta_i,\theta_j)\}_{i,j=1}^n\right)^{-1} \cdot \{k(\theta,\theta_i)\}_{i=1}^n \end{aligned} \tag{146}$$

В рамках данной работы было использована функция ковариации Матерна [141]

$$k(\theta_i,\theta_j) = \frac{1}{\Gamma(\nu)^{\nu-1}} \left(\frac{\sqrt{2\nu}}{l} d(\theta_i,\theta_j)\right)^{\nu} K_\nu\left(\frac{\sqrt{2\nu}}{l} d(\theta_i,\theta_j)\right), \tag{147}$$

где $\nu, l \in \mathbb{R}$ являются параметрами ядра, $d(\cdot,\cdot)$ – евклидово расстояние, $K_\nu(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода и $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция. Параметр ν задаёт гладкость функции, получаемой из распределения (см. Рис. 27), а l является параметром масштаба.

Для оптимизации параметров среды было использовано значение $\nu = \frac{5}{2}$, при котором ядро преобразуется к следующему виду

$$k(\theta_i,\theta_j) = \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{l} d(\theta_i,\theta_j) + \frac{5}{3l} d(\theta_i,\theta_j)^2\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{5}}{l} d(\theta_i,\theta_j)\right). \tag{148}$$

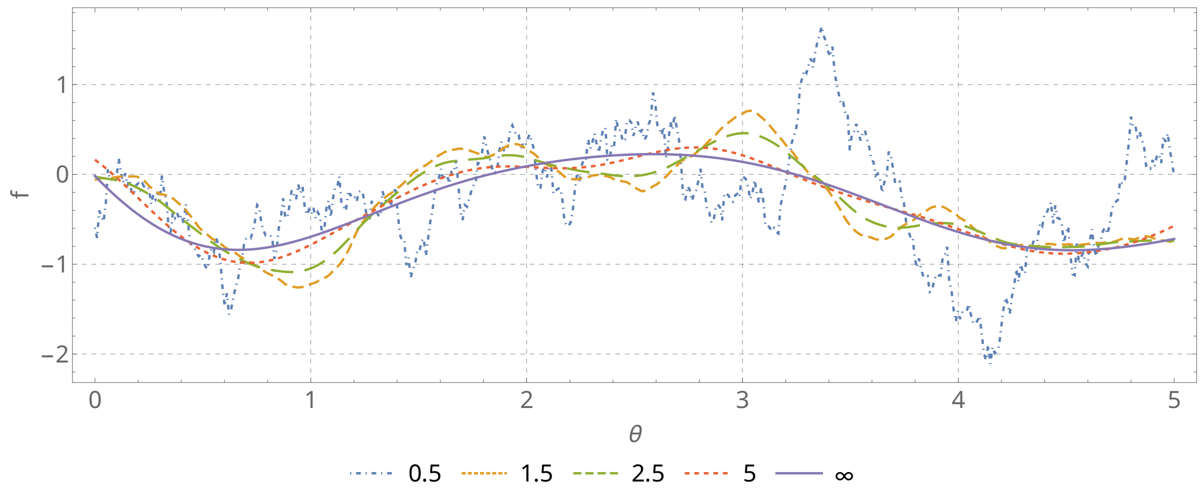


Рисунок 27 – Функция $f(\theta)$ выбранная из многомерного нормального распределения (145) с нулевым средним и матрицей ковариации, заданной ядром Маттерна с разными значениями параметра ν. $f(\theta)$ и θ не имеют единиц измерения и отображены для объяснения влияния параметра ν.

Такое значение показывает хороший баланс между гладкостью функции и её возможность аппроксимировать шероховатые данные, а также позволяет провести вычисление ядра без необходимости оценивать значение функции Бесселя. Параметр l изначально считается равным 1, и затем обновляется в процессе обучения с целью более точно аппроксимировать наблюдаемые данные.

В качестве функции оценки была использована так называемая верхняя доверительная граница

$$q(\theta) = \mathrm{E}[X_\theta] + \kappa\sqrt{\mathrm{D}[X_\theta]}, \tag{149}$$

где $X_\theta \sim \mathcal{N}(m, s^2)$ является случайной переменной подчиняющейся апостериорному распределению (146), $\mathrm{E}[X_\theta]$ и $\mathrm{D}[X_\theta]$ означают математическое ожидание и дисперсию случайной величины X_θ, соответственно. Параметр $\kappa \in \mathbb{R}$ задаёт баланс между эксплуатацией (exploitation) и исследованием (exploration), при этом для маленьких значений параметра предпочитаются точки, находящиеся около локальных максимумов функции, а большие значения позволяют точкам быть выбранным из всего диапазона (см. Рис. 28).

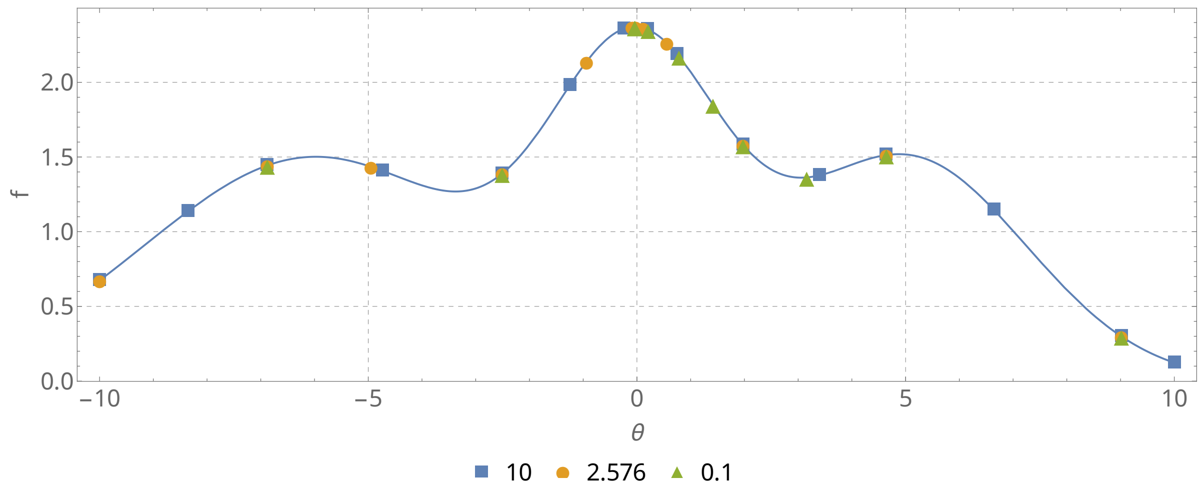


Рисунок 28 – Точки, выбранные в процессе Байесовской оптимизации с использованием верхней доверительной границы (Upper Confidence Bound) в качестве функции оценки для разных значений параметра κ. $f(\theta)$ является произвольной функцией, для которой была выполнена оптимизация, чтобы показать влияние параметра κ.

Оптимизация была выполнена на языке Python с использованием пакета BayesianOptimization [142](Байесовская оптимизация). Для ускорения процесса, вычисление мод было реализовано с использованием библиотеки Tensorflow [143], которая позволяет проводить вычисления на графическом процессоре и, таким образом, уменьшает время, затрачиваемое на получение величины $p^2_{ddec}(f)$ в ближайшей точке траектории судна для всего набора частот, с нескольких часов до нескольких минут.

В качестве целевой функции был использован средний квадрат разности логарифмов уровней звукового давления в ближайшей точке траектории судна, полученные из данных измерений и результатов моделирования

$$f(\theta) = -\frac{1}{|F_c|} \sum_{f_c \in F_c} \left(\log\left(E_{p,ddec}\left(f_c, d_{CPA}\right)\right) - \log\left(E^{mod}_{p,ddec}\left(f_c, d_{CPA}, \theta\right)\right)\right)^2 , \quad (150)$$

где F_c – множество центральных частот рассматриваемых децидекадных полос, а $E^{mod}_{p,ddec}\left(f_c, d_{CPA}, \theta\right)$ результат моделирования для центральной частоты f_c, расстояния d_{CPA} и параметров среды θ.

Профиль скорости звука в воде также подлежал корректировке во время проведения оптимизации. Он был параметризован единственным скалярным параметром $t \in [-1, 1]$ как аргументом функции линейно интерполированной для каждой глубины между тремя узлами $-1\,, 0\,, 1$. Интерполированный профиль скорости звука для данного параметра t может быть выражен формулой

$$c_{water}\left(z, t\right) = \begin{cases} c_{oct}\left(z\right) + \left(t+1\right)\left(c_{nov}\left(z\right) - c_{oct}\left(z\right)\right)\,, & -1 \le t \le 0\,, \\ c_{nov}\left(z\right) + t\left(c_{dec}\left(z\right) - c_{nov}\left(z\right)\right)\,, & 0 < t \le 1\,, \end{cases} \tag{151}$$

где $c_{oct}, c_{nov}, c_{dec}$ – профили скорости звука в воде за октябрь, ноябрь и декабрь соответственно (см. Рис. 22).

Скорость звука в слое осадков была параметризирована следующим образом

$$c_{sediment}\left(z\right) = c + \frac{z - z_b}{\Delta z}\Delta c\,, \tag{152}$$

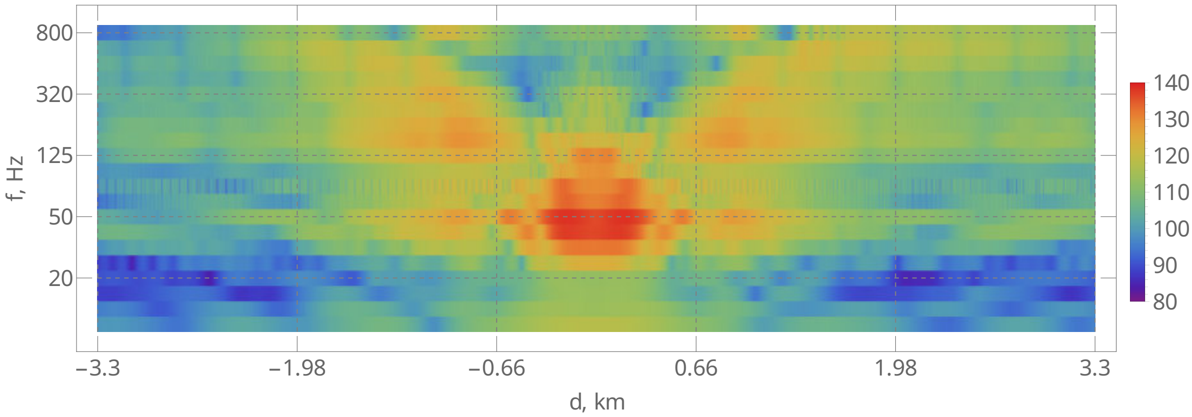
где z_b – глубина дна, Δz – толщина слоя осадков, c скорость звука на верхней границе слоя, и Δc разница в скорости звука.

Диапазоны оптимизируемых параметров и их значения, полученные в результате оптимизации показаны в Таблице 11. Стоит заметить, что наибольшее согласие уровней звукового давления в ближайшей точке прохода было достигнуто для профиля скорости звука за октябрь с несколько меньшей скоростью звука в слое осадков по сравнению с первоначальными параметрами. В результате оптимизации также были получены значительно большие значения параметра затухания, чем можно было бы ожидать. Это может быть объяснено тем, что используемые модели не учитывают сдвиговую упругость донных пород. Наличие поперечных волн в дне вносит дополнительную потерю акустической энергии, в результате чего большое значение затухания в эквивалентной модели жидкого дна должно компенсировать этот эффект. Также стоит заметить, что наилучшее согласие модели и данных было достигнуто при максимальном значении плотности слоя осадков в рассматриваемом интервале. Это может быть объяснено низкой чувствительностью модели к данному параметру, что часто обнаруживается в задачах геоакустической инверсии. Было решено не увеличивать интервал значений плотности с целью удержать этот параметр в разумных пределах. Качество результатов оптимизации может быть оценено из графиков уровней звукового давления на Рис. 24.

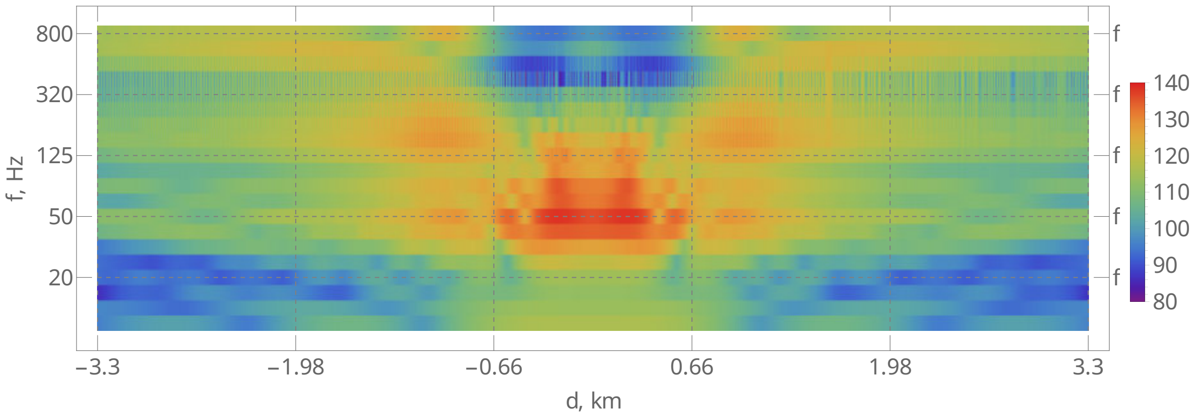
	Слой осадков				
	Толщина Δz, м	Скорость звука м/с		Плотность г/см^3	Коэфф. погл. дБ/λ
		c	Δc		
исходные	50	1541	50	1.8	0.61
оптим.	61.4	1519.2	50	2	2.01
диапазон	$[20, 200]$	$[1500, 1600]$	$[0, 100]$	$[1, 2]$	$[0.1, 2.5]$

	Слой основания			Профиль скорости звука в воде
	Скорость звука м/с	Плотность г/см^3	Коэфф. погл. дБ/λ	
исходные.	2160	2	0.25	0
оптим.	1931.5	2	0.25	-1
диапазон	$[1800, 3000]$			$[-1, 1]$

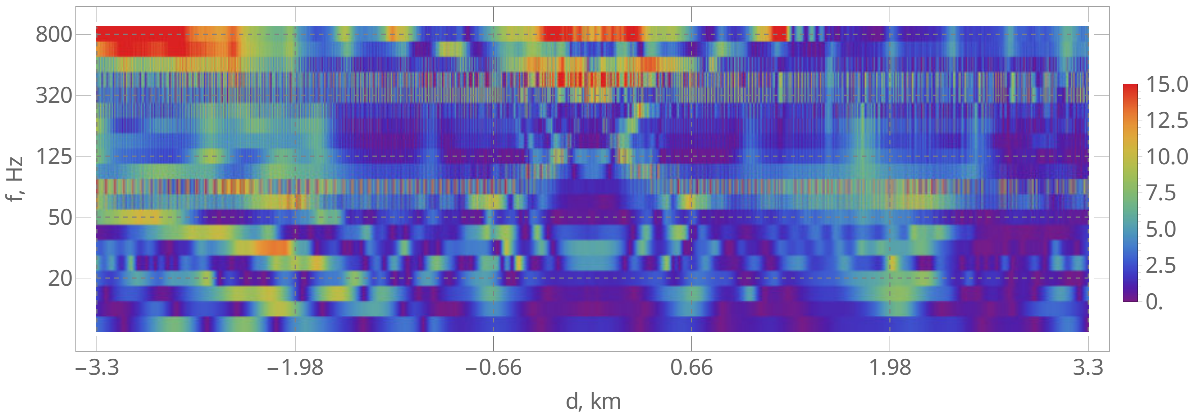
Таблица 11 – Оптимизируемые параметры



(a) AMPLE, 3D

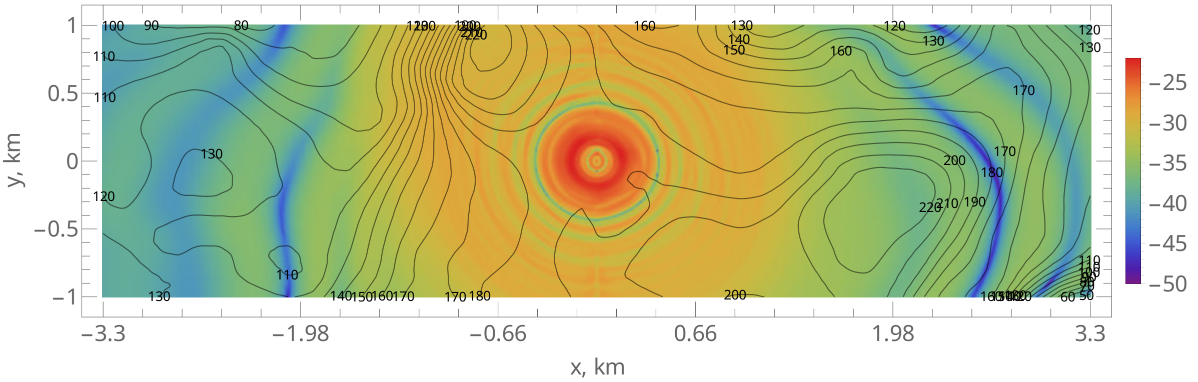


(b) 2D

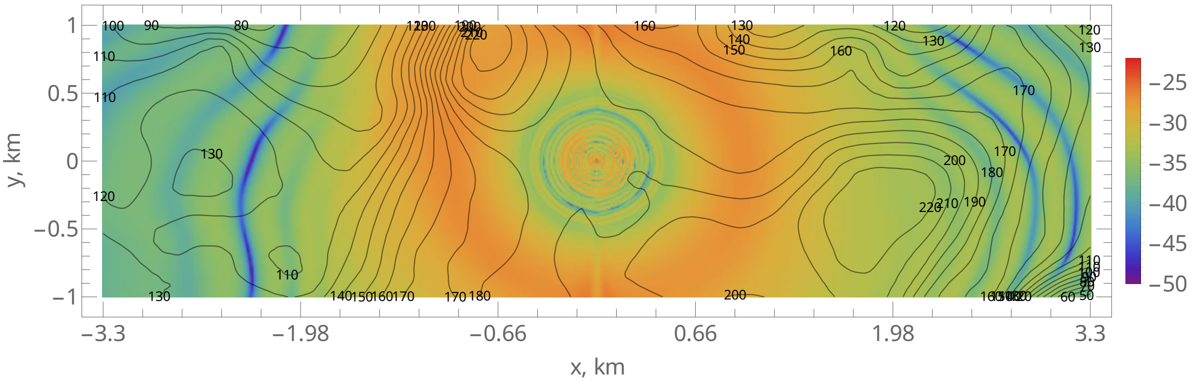


(c) Разница

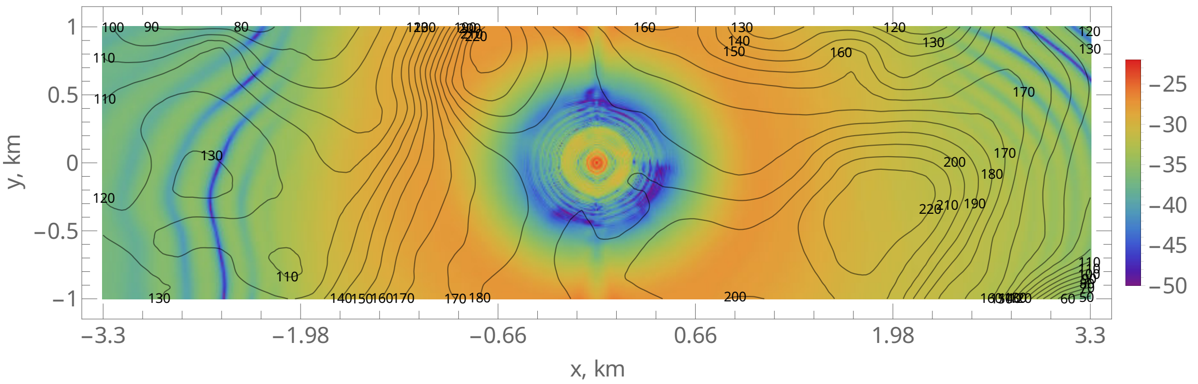
Рисунок 29 – График уровней звукового давления, смоделированных в точке ближайшего прохода с использованием оптимизированных параметров среды.



(a) 100 Hz

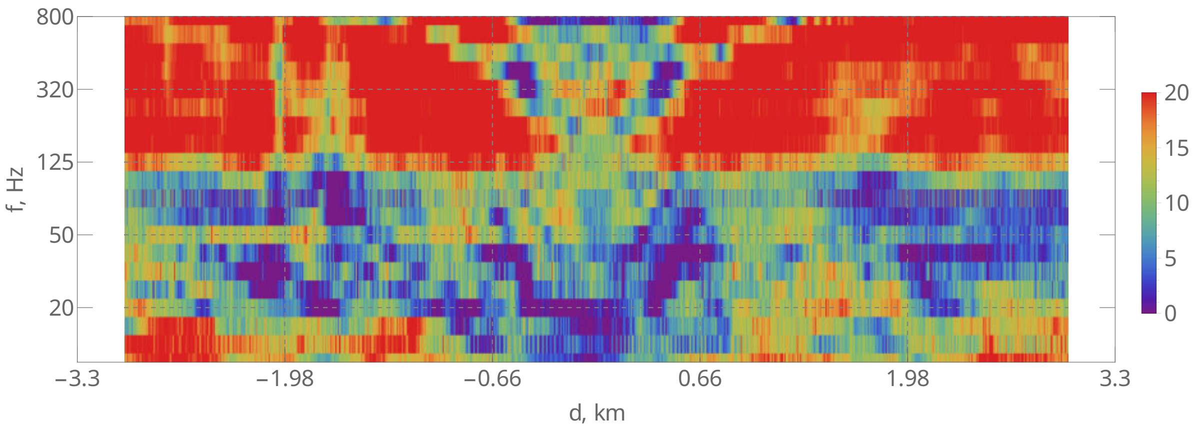


(b) 200 Hz

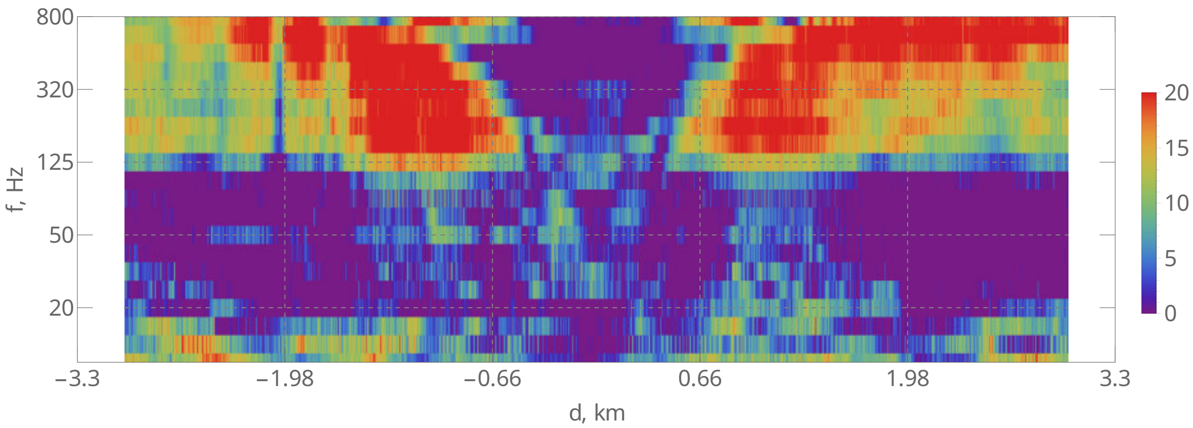


(c) 400 Hz

Рисунок 30 – График горизонтальных срезов акустического поля (в дБ отн. 1 м) на отдельных частотах. Сплошными кривыми показаны изобаты в области.



(a) Исходные параметры



(b) Оптимизированные параметры

Рисунок 31 – График точности моделирования уровней звукового давления с использованием исходных (a) и оптимизированных (b) параметров.

4.1.4 Расчёт уровней звукового давления с использованием оптимизированных параметров

После проведения оптимизации геокустических параметров среды было проведено моделирование звуковой нагрузки, связанной с движением судна, на акваторию. Результаты, полученные с использованием полностью трёхмерной модели AMPLE и её двумерного, не учитывающего нерегулярность волновода, аналога, отображены на Рис. 29a и 29b. Рис. 29c также содержит разницу между двумя моделями (которая представляет собой разницу, выраженную в логарифмических единицах, между первыми двумя графиками). В первую очередь стоит заметить более высокую, по сравнению с результатом, полученным для исходных параметров среды, качественную согласованность с измеренным звуковым полем, показанным на Рис. 25. Также стоит отметить, что для некоторых расстояний и частотных полос разница между результатами двумерного и трёхмерного моделирования достигает 7-10 дБ. (в некоторых точках графика она может даже достигать 15 дБ., однако эти точки соответствуют относительно небольшим уровням шума как в результатах моделирования, так и в данных измерений). Такая разница может быть объяснена проявлением эффектов горизонтальной рефракции [88, 144] акустических волн над неоднородным дном. Важность этого эффекта хорошо видна на Рис. 30, на котором результаты моделирования приведены для отдельных тональных компонент спектра источника звука. Как и ожидалось, звук преломляется в сторону областей с большой глубиной дна, и фронты волн на расстоянии $1-2$ км. от источника заметно отличаются от окружности, будучи деформированными в следствии горизонтальной рефракции.

Точность полученных результатов моделирования для исходных и оптимизированных параметров среды отражает Рис. 31, на котором показана разница расчётных значений с измеренными уровнями звукового давления для обеих моделей волновода. Можно заметить, что оптимизация параметров среды позволяет достичь высокой точности аппроксимации данных измерений для всех частот вплоть до 141 Гц. Стоит заметить, что такой диапазон частот является критически важным в задачах оценки влияния на окружающую среду, так как он содержит большую часть акустической энергии источника (как правило, более 90%). Существенное улучшение точности может быть также замечено для более высоких частот около точки ближайшей к приёмной системе точки траектории судна (а именно при -0.7 км $< x <$ 0.7 км). Некоторые улучшения также могут быть замечены на больших расстояниях, а именно при $|x| > 2$ км. В этих областях разница между результатами моделирования и данными измерений сравнима с разницей предсказаний двумерной и трёхмерной моделей. Таким образом, моделирование с учётом трёхмерных эффектов вносит существенный вклад в точность проведённой оценки.

4.2 Моделирование уровней звукового давления, связанного с прохождением сейсморазведочных импульсов

4.2.1 Задача мониторинга сейсморазведочных работ

В данной главе рассматривается моделирование распространения сейсморазведочных импульсов. Сейсморазведка проводилась в мелководной части северо-восточного шельфа острова Сахалин. Сейсморазведочные импульсы генерировались системой пневнопушек судна-катамаран, движущегося по траекториям, напоминающим функцию гаусса, по акватории с глубинами 8–30 метров. Общий объём пневмопушек составил 0.021 м.^{3}. Они погружались на глубину $4 - 4.2$ метра, при этом осадка судна составляла 5 метров.

В ходе акустического мониторинга сейсморазведочных работ, выполненного ТОИ ДВО РАН, два автономных подводных акустических регистратора (АПАР) были установлены на дне моря на 10 и 20 метровых изобатах. Изменение акустического давления было зафиксировано с использованием калиброванных гидрофонов ГИ-50 на расстоянии 20 сантиметров от дна для полосы частот 2–15000 Гц в динамическом диапазоне не менее чем 145 дБ. Помимо акустических, в исследуемой области также были проведены гидрологические измерения, включающие определение профиля скорости звука в воде во время сейсморазведочных операций. На Рис. 32 отображена карта области, траектория движения судна по одной из линий и усреднённый профиль скорости звука в воде во время проведения измерений.

На Рис. 33 отображены типичные временные ряды сейсморазведочных импульсов, записанных в точках P1 и P2. На расстоянии 630 метров от источника (то есть в точке P1), где глубина воды достигает 20 метров, амплитуда импульса, измеренного у дна, достигает 3000 Па. Спектр этого импульса содержит ярко выраженные максимумы на частотах 47 Гц и 125 Гц. Значение же звукового воздействия (SEL, sound exposure level) в односекундном интервале в точке P1 достигает 168 дБ отн. 1мкПа$^2 \cdot$с. Заметим, что значение звукового воздействия вычисляется в частотной области (не из временного ряда импульса) путём интегрирования по частотному интервалу 10–400 Гц. (см. Главу 2.9). Это позволяет уменьшить влияние низкочастотных псевдо-сигналов обтекания, возникающих из-за наличия течений в области установки АПАР, а также сигналов с частотой более 400 Гц.

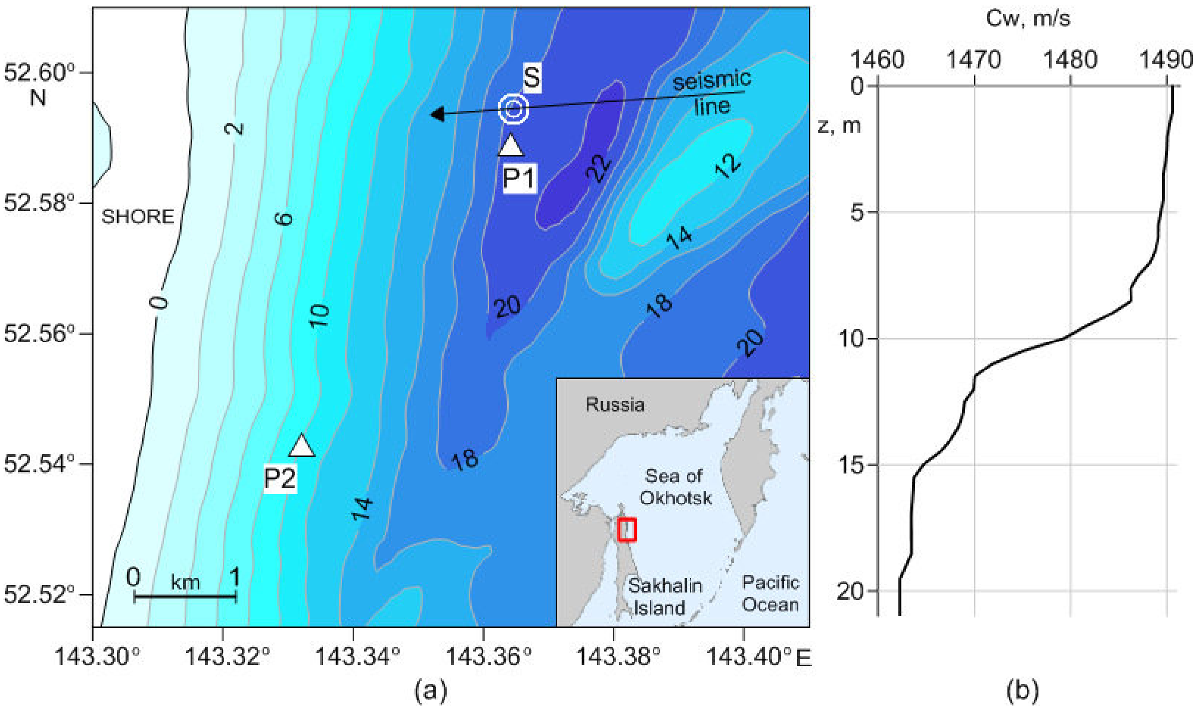


Рисунок 32 – Карта глубин в области проведения сейсморазведочных работ с указанием точки источника звука S и двух точек приёма P1 и P2 (**a**). График зависимости скорости звука от глубины в водном слое (**b**).

В точке измерений P2, расположенной на расстоянии 6.2 километра от источника, где глубина моря составляет 10 метров, амплитуда измеренного импульсного сигнала не превышает 90 Па, а значения звукового воздействия в односекундном интервале снизилось до 138.7 дБ отн. 1 мкПа$^2 \cdot$ с. Из формы сигнала в точке P2 также можно увидеть, что низкочастотный предвестник с частотой 40 Гц был записан первым. Этот предвестник является интерферецонной головной волной (также называемой головной волной Булдерева), распространяющейся в верхнем слое донных осадков [145]. Водная компонента сигнала формируется за ней и её энергия в основном распределена по диапазону частот в 90–400 Гц.

Импульсный сигнал, наблюдаемый в точке P1, был использован в расчётах в качестве опорного для восстановления эффективного спектра источника, а точность восстановления была оценена сравнением импульса, записанного в точке P2, с импульсом, вычисленным в этой точке в результате моделирования.

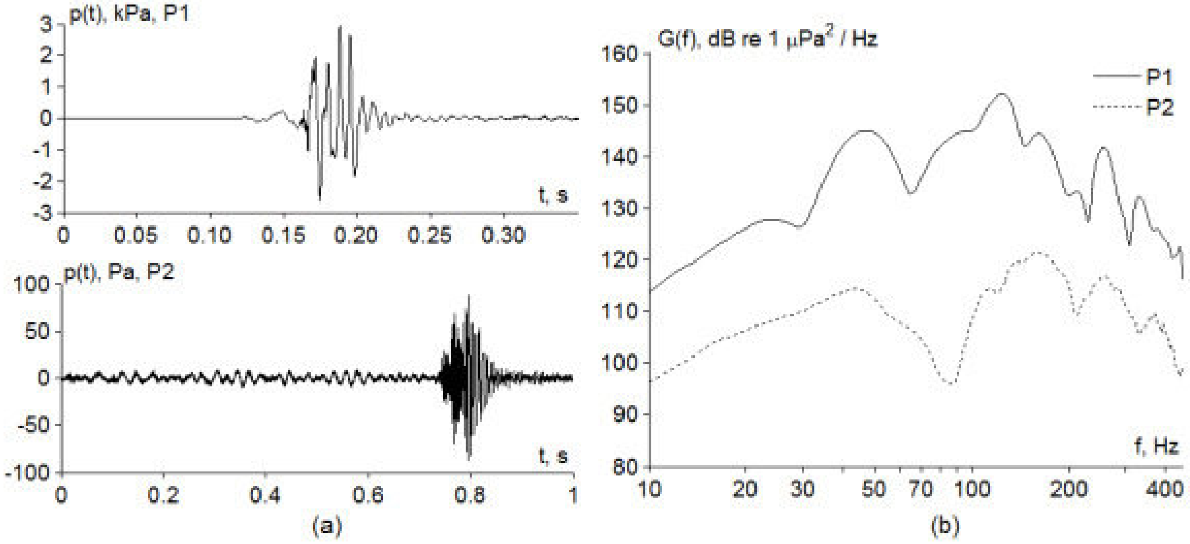


Рисунок 33 – Изменение акустического давления в приёмниках P1 и P2 (**a**) и их спектры (**b**) возникшие в результате сейсмической разметки

Стоит заметить, что пневмопушки, использованные на суднах во время сейсмической разведки были объединены в массивы (батареи), чтобы увеличить амплитуду звукового давления и уменьшить частоту испускания пульсов.

Дополнительно, такая комбинация пневмопушек позволяет обеспечить такую диаграмму направленности, что большая часть низкочастотной (5–120 Гц) акустической энергии излучается вертикально вниз. Тем не менее, другая часть акустической энергии также распространяется в горизонтальных направлениях, будучи переносимой водными и водно-донными нормальными модами.

Соответствующая компонента сейсморазведовательного импульса может быть записана гидрофонами у дна на некотором расстоянии от источника. Согласно измерениям, полученным в точке приёма P1, 91% акустической энергии записанного импульса содержится в диапазоне частот 10–200 Гц. Значение звукового воздействия, соответствующему полному импульсу в точке P1 превышает значение энергии сигнала в частотном диапазоне 10–200 Гц всего на 0.5 дБ. По этой причине, при проведении моделирования распространения сейсморазведочных сигналов вычисления были проведены для частотного диапазона от 10 до 200 Гц.

4.2.2 Модель волновода

Геоакустическая модель волновода, использованная для расчётов распространения звука вдоль трассы S-P1-P2, состоит из двух слоёв (слой воды и слой донных осадков). При проведении моделирования была использована реалистичная батиметрия, полученная в результате прямых измерений глубины моря. Модель дна состояла из трёх слоёв, как показано на Рис. 34. Скорость звука, плотность осадочных пород и коэффициент затухания в дне аппроксимировались кусочно-линейными функциями по глубине (см. Рис. 34). Такая модель основана на приближении донных параметров, полученных из исследований, проведённых в данной области ранее (см. [146]). Упругие свойства дна не были учтены, так как коренная порода в данной области находится глубже, чем рассмотренная глубина волновода. Профиль скорости звука в воде был получен из измерений в рассматриваемой области.

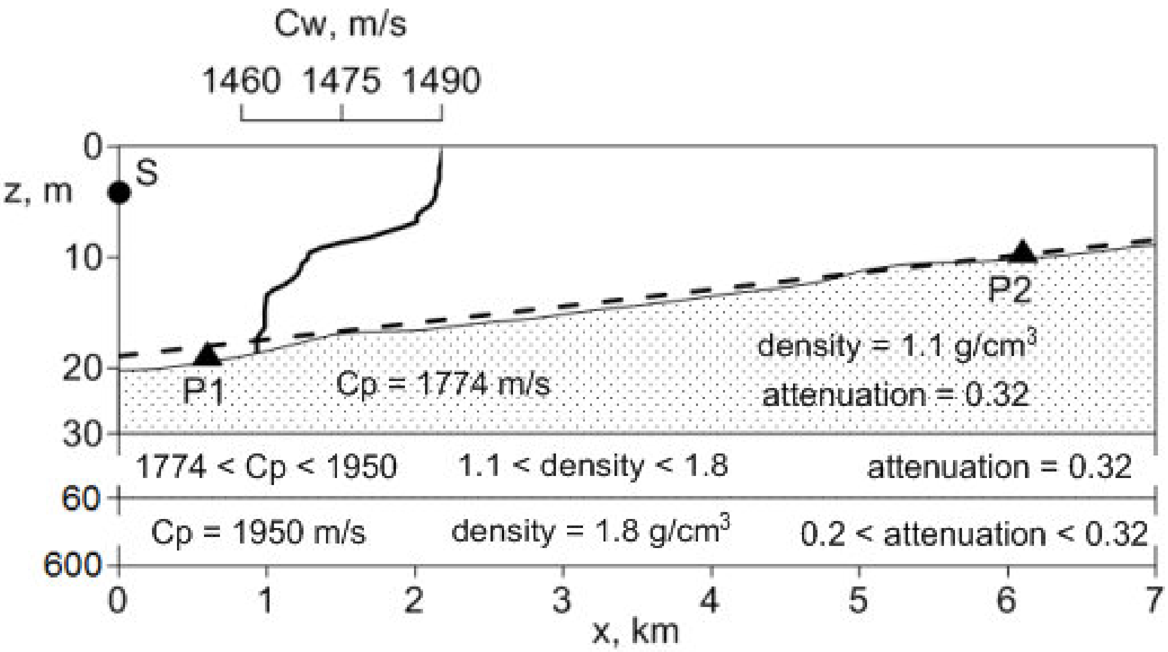


Рисунок 34 – Модель волновода и значения акустических параметров среды.

4.2.3 Результаты моделирования для упрощённой модели рельефа дна

Как видно из Рис. 32, изобаты в рассматриваемой области очень близки к параллельным равноудалённым друг от друга прямым, поэтому батиметрия в вычислительной области была аппроксимирована линейной функцией горизонтальных координат x, y. Угол наклона дна составляет 0.3°, что является типичным для Сахалинского шельфа. Акустическая трасса S-P1-P2 находится под углом 16° к оси x, то есть ориентирована практически по направлению поперёк наклона дна. Известно, что в такого рода волноводах межмодовое взаимодействие вносит незначительный вклад в распространения звука, в то время как эффекты горизонтальной рефракции играют важную роль в распределении уровня звукового воздействия [47].

Поверхность раздела вода-дно была аппроксимирована наклонной плоскостью, задаваемой следующим уравнением

$$z = 18.9 - 0.0015x + 0.005y\,. \tag{153}$$

На примере такой простой модели рельефа дна в данном разделе рассматривается различие между узкоугольным и широгоугольным решениями. Узкоугольное решение при этом было получено с использованием программы MPE, вычисляющей решение узкоугольного модового параболического уравнениея с учётом взаимодействия мод [147, 148].

На Рис. 35 отображено горизонтальное распределение уровня звукового воздействия импульсного сигнала, распространяющегося из точки S с батиметрией волновода, описываемой уравнением (153), и вычисленной с использованием программ AMPLE (a) и MPE (b), а также абсолютное значение разницы между ними (c). Из графика видно, что на глубинах менее 10 м, разница достигает 8 дБ. Таким образом, программа AMPLE, по сравнению с MPE, позволяет более точно воспроизвести эффекты горизонтальной рефракции звука над наклонным дном. Разница уровней звукового воздействия показывает важность использования модели, имеющей достаточно широкую апертуру в горизонтальной плоскости в подобных задачах.

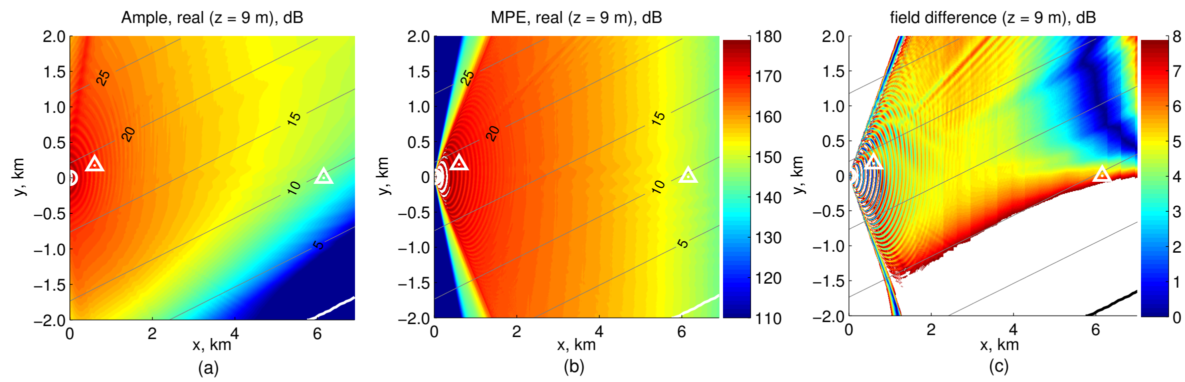


Рисунок 35 – Пространственное распределение уровня звукового воздействия при глубине 9 м, вычисленное с использованием AMPLE (**a**) и MPE(**b**) для моделирования распространения в волноводе с донным наклоном, заданным уравнением 153. Абсолютная разница между ними также отражена на (**c**).

4.2.4 Результаты моделирования с учётом реальной батиметрии

Далее рассматривается точность вычисления уровней звукового воздействия, с использованием программ AMPLE и MPE, на примере волновода с реалистичной батиметрией. В данном случае моделируется форма сигнала в точке P2 и оценивается точность моделей прямым сравнением с данными измерений.

На Рис. 36 – 38 отображены результаты вычислений. Контурные графики на Рис. 36 показывают, что структура распределения уровня звукового воздействия в данном случае является качественно схожей с таковыми, полученными для упрощённой модели батиметрии (153). Стоит заметить, что абсолютная разница между результатами вычислений моделей (см. Рис. 36с) в данном случае также схоже с Рис. 35с. Распределения звукового воздействия явно отражают батиметрию в рассматриваемой области, и их структура также показывает проявление типичных эффектов горизонтальной рефракции в волноводах мелкого моря (большая амплитуда поля в областях с большей глубиной).

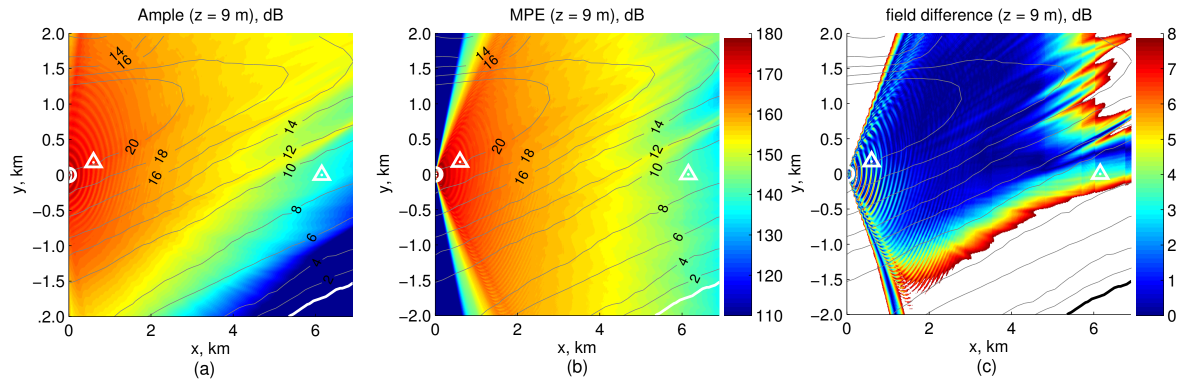


Рисунок 36 – Пространственное распределение значения звукового воздействия на глубине 9 м, вычисленное с использованием AMPLE (**a**) и MPE(**b**) для волновода с реалистичной батиметрией. Абсолютная разница между ними также отражена на (**c**).

Стоит также заметить, что результаты, полученные с использованием AMPLE и MPE, показывают хорошее согласие по направлению распространения (то есть по прямой $y = 0$, см. Рис. 37). Однако, при удалении от этой прямой возникает существенное различие между предсказаниями моделей (см. Рис. 36c). Ясно, что разница возникает из ограниченной апертуры в горизонтальной плоскости в модели, используемой в MPE. Важно отметить, что различие достигает 8 дБ даже при отклонении от оси распространения на $\pm 3.5°$ на расстоянии около 7 км от источника.

На Рис. 37 также приведено сравнение форм сигнала, вычисленных моделями в точке P2 (при расчётах спектр источника был восстановлен на основе сигнала в точке P1). Как видно из рисунка, сигнал, полученный с использованием AMPLE, показывает существенно большее качественное и количественное сходство с данными измерений.

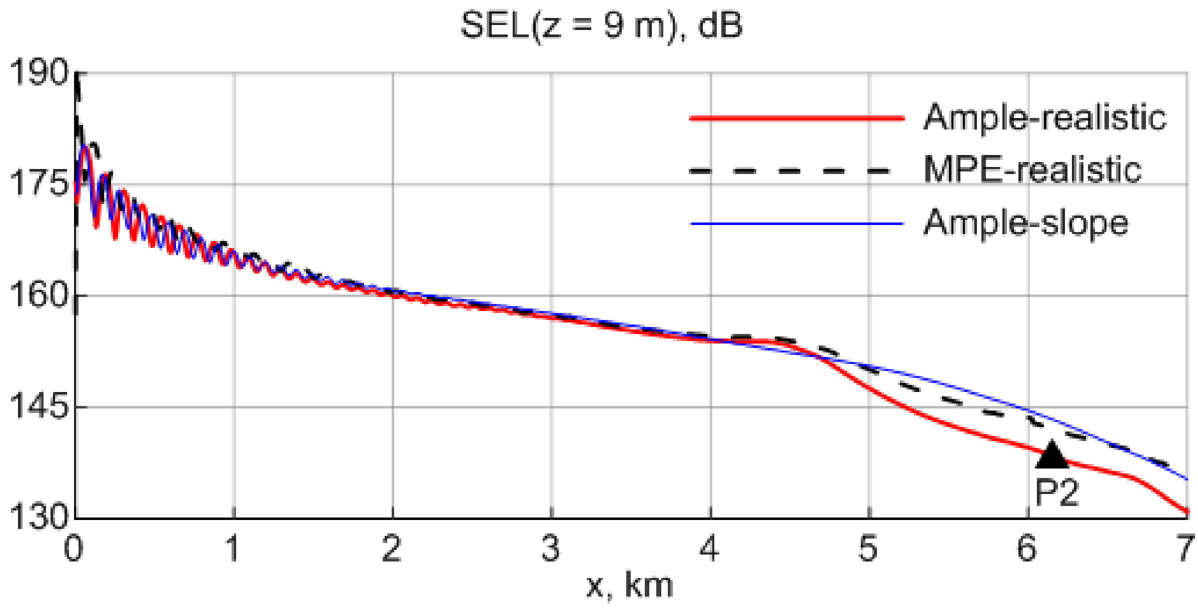


Рисунок 37 – График зависимости уровня звукового воздействия от расстояния x на прямой $y = 0$ и глубине 9 м, вычисленной с использованием AMPLE и MPE для упрощённой и реальной батиметрии.

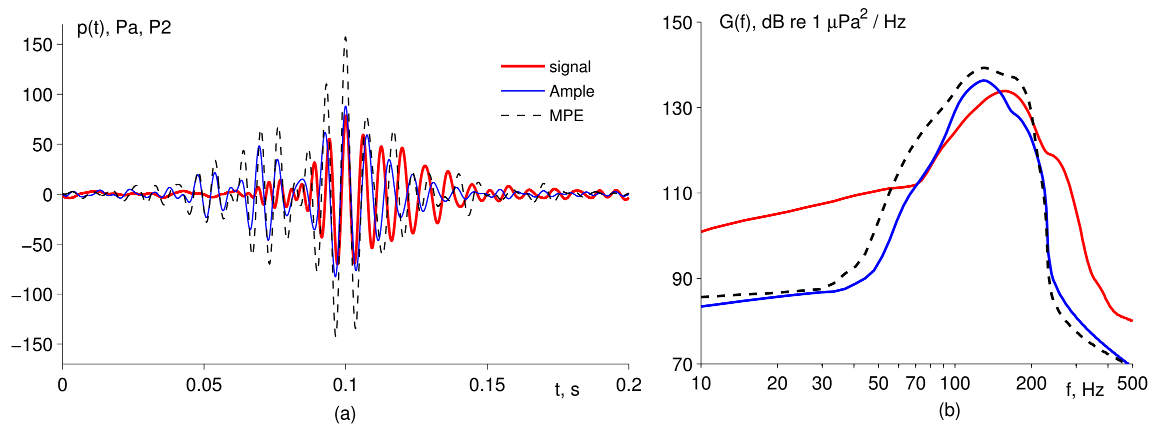


Рисунок 38 – Сравнение импульсных сигналов (**a**) и их спектров (**b**), полученные из данных измерений и результатов моделирования в точке P2.

4.3 Выводы к четвёртой главе

В данной главе диссертации было рассмотрено моделирование широкополосных звуковых полей в двух случаях: звуковое поле, наблюдаемое при движении морского судна, а также поле, связанное с проведением сейсморазведки. Такое моделирование имеет огромное значение для проведения оценки уровней звукового воздействия антропогенных акустических сигналов в областях, для которых прямые измерения не могут быть проведены с необходимым пространственным разрешением для оценки их влияния на окружающую среду. Выполнение такого рода оценок составляет задачу акустического мониторинга, имеющую целью защиту различных видов морских животных от звукового воздействия.

В случае моделирования звукового поля одиночного судна точное предсказание уровней звукового поля потребовало адекватной оценки параметров среды. Действительно, оптимизация показала, что предсказания звукового поля были особенно чувствительны к контрасту геоакустических параметров на границе раздела вода-дно. Грубая оценка, основанная на геологических картах и таблицах типичных геоакустических свойств различных видов твёрдых пород и осадков, может быть недостаточной для данной задачи. Вместо этого стоит провести геоакустическую инверсию (или, широко говоря, оптимизацию параметров), используя подходящие источники или проводя специализированные эксперименты по измерению потерь на распространение. Некоторые подходы к оценке геоакустических параметров дна известны в литературе, например [74, 75, 76]. В рамках данной задачи, использование параметров, оптимизированных с учетом измерений в единственной точке (а именно точке ближайшего прохода), позволило существенно улучшить точность предсказания уровней звукового давления на всей акватории.

Важно обратить внимание, что оптимизированные значения параметров среды с высокой долей вероятности будут в некотором смысле нефизическими и позволяют лишь параметризовать настоящее дно таким образом, чтобы потери на распространение были приведены в соответствие результатам натурных измерений (например, большое значение параметра затухания компенсирует отсутствие поперечных волн в использованной модели, что в контексте рассматриваемой задачи может быть рассмотрено как механизм возникновения дополнительных потерь). Стоит упомянуть, что использование среднемноголетних данных о профиле скорости звука также может привести к ошибкам в предсказании уровней звукового давления. Лучшим вариантом может быть использование профилей скорости звука, полученных с использованием моделей циркуляции океана, особенно в тех областях, где такие модели ассимилируют местные измерения.

Данная глава также демонстрирует важность учёта трёхмерных эффектов распространения звука при проведении моделирования акустического поля. Однако необходимо отметить, что использование трёхмерных моделей, требующих проведения существенно больших вычислений по сравнению с их двумерными аналогами, имеет смысл лишь после проведения оптимизации параметров дна, так как в обратном случае гораздо более значительные ошибки будут возникать из-за неточности информации о самих параметрах среды.

Конечно вероятно, что такое большое судно не может быть точно представлено в виде точечного источника, и вид его направленности должен быть учтён [149, 150], так как иначе даже параметры, оптимизированные относительно точки ближайшего прохода, не могут гарантировать идеальное представление звукового поля для большого интервала частот (например, EC2). Действительно, размеры сухогруза в рассматриваемом сценарии сравнимы с его расстоянием ближайшего прохода от гидрофона. Наличие данных измерений, содержащих информацию об изменениях фазы (а не только амплитуды) может позволить рассмотреть параметризацию источника множеством точечных источников, спектр которых наверное может быть оценен. Представление судов в виде пространственно распределённых источников звука при проведении измерений подводными акустическими станциями является предметом текущих исследований [151].

В случае моделирования распространения акустических сигналов, возникающих в результате проведения сейсмологической разведки, было проведено моделирование уровня звукового воздействия в большой морской области. При этой результаты измерений в опорной точке были использованы для восстановления эффективного спектра источника, который затем использован для вычисления поля уровня звукового воздействия во всей акватории рассматриваемой области.

При проведении моделирования были использованы данные, полученные во время проведения сейсмологической разведки в Охотском море на Сахалинском шельфе. Сейсмический импульс, создаваемый разведовательным судном, был записан в двух точках. Результаты измерений, полученные в точке P1 на расстоянии около 600 м от источника S, были использованы для восстановления спектра источника, в то время как данные, полученные в точке P2, были использованы для оценки результатов моделирования.

Было показано, что решение модовых параболических уравнений позволяет восстановить форму сигнала в точке P2 с удовлетворительной точностью, как во временной, так и в частотной областях. Также важно отметить, что использование широкоугольных модовых параболических уравнений позволяет достичь существенно большей точности предсказания, по сравнению с их узкоугольными аналогами, учитывающими взаимодействие мод. Несмотря на то, что значение звукового воздействия воспроизводится моделями с достаточной точностью для использования в прикладных задачах, наблюдается существенное несоответствие спектров в частотном диапазоне 10-50 Герц (как видно на Рис. 38). Как и в случае моделирования звукового поля единственного судна, такое различие можно объяснить недостаточно точной моделью морского дна, поэтому точность предсказания моделей также может быть повышена использованием геокустической инверсии для восстановления структуры и параметров дна напрямую из данных измерений. В случае с распространением сейсморазведовательных импульсов такая инверсия может быть выполнена с использованием моделей, основанных на свертках [152]. Использование такого подхода также может способствовать дальнейшему увеличению точности предсказания уровня звукового воздействия. Конечно, даже в таком идеальном случае, полученные параметра дна представляли бы собой лишь грубую аппроксимацию морской среды, что все равно может привести к пренебрежению важными трёхмерными эффектами вдоль и поперёк направления распространения звука [153].

Результаты четвёртой главы опубликованы в работах [49, 51].

Заключение

Основными результатами, полученными в настоящем диссертационном исследовании, являются:

- Разработана и апробирована методика численного решения псевдодифференциальных модовых параболических уравнений с искусственным ограничением расчётной области путём постановки граничных условий прозрачности или добавления к ней согласованных поглощающих слоёв.

- Разработан комплекс программ на языке программирования C++, который может быть использован для моделирования распространения тональных и импульсных сигналов, а также вычисления скалярных и векторных акустических полей антропогенных шумов в океане с возможностью учёта батиметрических и гидрологических данных и структуры слоёв дна, и ориентированный на максимальную производительность.

- Моделирование антропогенных шумов, связанных с сейсморазведочными работами и судоходством, проведённое с использованием разработанного комплекса прикладных программ, позволило добиться согласия уровней акустической экспозиции (SEL) с данными прямых измерений с точностью до 1 дБ и согласия значений распределения энергии в децидекадных частотных полосах на различных расстояниях от источника шума с точностью до 5 дБ для диапазона частот, в котором сосредоточена большая часть энергии сигнала.

Список литературы

1. Lee D., Schultz M. H. Numerical Ocean Acoustic Propagation in Three Dimensions. — WORLD SCIENTIFIC, 1995.
2. TOLSTOY A. 3-D PROPAGATION ISSUES AND MODELS // Journal of Computational Acoustics. — 1996. — Vol. 04, no. 03. — P. 243–271.
3. Smith K. B. A three-dimensional propagation algorithm using finite azimuthal aperture // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1999. — Dec. — Vol. 106, no. 6. — P. 3231–3239.
4. Sturm F., Fawcett J. A. On the use of higher-order azimuthal schemes in 3-D PE modeling // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2003. — Vol. 113, no. 6. — P. 3134–3145.
5. Heaney K. D., Campbell R. L. Three-dimensional parabolic equation modeling of mesoscale eddy deflection // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2016. — Feb. — Vol. 139, no. 2. — P. 918–926.
6. Experimental evidence of three-dimensional acoustic propagation caused by nonlinear internal waves / S. D. Frank, M. Badiey, J. F. Lynch, W. L. Siegmann // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2005. — Aug. — Vol. 118, no. 2. — P. 723–734.
7. Heaney K. D., Murray J. J. Measurements of three-dimensional propagation in a continental shelf environment // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2009. — Mar. — Vol. 125, no. 3. — P. 1394–1402.
8. Acoustic Ducting, Reflection, Refraction, and Dispersion by Curved Nonlinear Internal Waves in Shallow Water / J. Lynch, Y.-T. Lin, T. Duda, A. Newhall // Oceanic Engineering, IEEE Journal of. — 2010. — Feb. — Vol. 35. — P. 12–27.

9. Bradley D. L., Hudimac A. A. The Propagation of Sound in a Wedge-Shaped Shallow-Water Duct // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1971. — Jan. — Vol. 49, 1A_Supplement. — P. 97–97.

10. Buckingham M. J. Theory of three-dimensional acoustic propagation in a wedgelike ocean with a penetrable bottom // Journal of the Acoustical Society of America. — 1987. — Vol. 82. — P. 198–210.

11. Deane G. B., Buckingham M. J. An analysis of the three-dimensional sound field in a penetrable wedge with a stratified fluid or elastic basement // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1993. — Mar. — Vol. 93, no. 3. — P. 1319–1328.

12. Lee K., Seong W., Na Y. Three-dimensional Cartesian parabolic equation model with higher-order cross-terms using operator splitting, rational filtering, and split-step Padé algorithm // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Sept. — Vol. 146. — P. 2041–2049.

13. Lee K., Seong W., Na Y. Split-step Padé solver for three-dimensional Cartesian acoustic parabolic equation in stair-step representation of ocean environment // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 2050–2057.

14. Petrov P. N., Petrov P. S. Asymptotic solution for the problem of sound propagation in a shallow sea with the bathymetry described by a parametric quadratic function // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1946–1955.

15. Porter M. B. Beam tracing for two- and three-dimensional problems in ocean acoustics // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 2016–2029.

16. Sagers J. D., Ballard M. S. Scale model observations of coupled vertical modes in a translationally invariant wedge // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1867–1874.

17. Barclay D. R., Lin Y.-T. Three-dimensional ambient noise modeling in a submarine canyon // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1956–1967.

18. Parameter dependence of acoustic mode quantities in an idealized model for shallow-water nonlinear internal wave ducts / M. A. Milone, B. J. DeCourcy, Y.-T. Lin, W. L. Siegmann // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1934–1945.

19. Katsnelson B. G., Petrov P. S. Whispering gallery waves localized near circular isobaths in shallow water // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1968–1981.

20. DeCourcy B. J., Lin Y.-T., Siegmann W. L. Effects of front width on acoustic ducting by a continuous curved front over a sloping bottom // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1923–1933.

21. Reeder D. B., Lin Y.-T. 3D acoustic propagation through an estuarine salt wedge at low-to-mid-frequencies: Modeling and measurement // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1888–1902.

22. Sagers J. D., Lenhart R. D., Ballard M. S. Observation of out-of-plane ambient noise on two vector sensor moorings in Lake Travis // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1903–1912.

23. Ballard M. S., Sagers J. D. Measurements and modeling of acoustic propagation in a scale model canyon // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1858–1866.

24. Underwater acoustic energy fluctuations during strong internal wave activity using a three-dimensional parabolic equation model / G. A. Dossot, K. B. Smith, M. Badiey, J. H. Miller, G. R. Potty // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1875–1887.

25. Multiscale multiphysics data-informed modeling for three-dimensional ocean acoustic simulation and prediction / T. F. Duda, Y.-T. Lin, A. E. Newhall, K. R. Helfrich, J. F. Lynch, W. G. Zhang, P. F. J. Lermusiaux, J. Wilkin // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1996–2015.

26. Dall'Osto, R. D. Source triangulation utilizing three-dimensional arrivals: Application to the search for the ARA San Juan submarine // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 2104–2112.

27. Oliveira C. A., Tiago, Ying-Tsong L. Three-dimensional global scale underwater sound modeling: The T-phase wave propagation of a Southern Mid-Atlantic Ridge earthquake // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 2124–2135.

28. Three-dimensional bottom diffraction in the North Pacific / R. A. Stephen, S. T. Bolmer, P. F. Worcester, M. A. Dzieciuch, I. A. Udovydchenkov // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1913–1922.

29. Three-dimensional finite element simulation of acoustic propagation in spiral bubble net of humpback whale / X. Qing, P. R. White, T. G.

Leighton, S. Liu, G. Qiao, Y. Zhang // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 1982–1995.

30. Three-dimensional modeling of earthquake generated acoustic waves in the ocean in simplified configurations / J. Lecoulant, C. Guennou, L. Guillon, J.-Y. Royer // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Sept. — Vol. 146. — P. 2113–2123.

31. Hardin R. H. Application of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations // Siam Review. — 1973. — Vol. 15. — P. 423.

32. Tappert F. D. Parabolic equation method in underwater acoustics // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1974. — Apr. — Vol. 55, S1. — S34–S34.

33. Ivansson S. Local accuracy of cross-term corrections of three-dimensional parabolic-equation models // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 2030–2040.

34. Lin Y.-T. Three-dimensional boundary fitted parabolic-equation model of underwater sound propagation // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 2058–2067.

35. An explicit marching-on-in-time scheme for solving the time domain Kirchhoff integral equation / R. Chen, S. B. Sayed, N. Alharthi, D. Keyes, H. Bagci // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 2068–2079.

36. Fahnline J. B. Efficient, wide-band rigid-body and elastic scattering computations using transient equivalent sources // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Oct. — Vol. 146, no. 3. — P. 2080–2092.

37. Calazan R., Rodríguez O. TRACEO3D Ray Tracing Model for Underwater Noise Predictions //. — 03/2017. — P. 183–190.

38. Porter M. The KRAKEN normal mode program //. — 1992.

39. Duda T. F. Initial results from a Cartesian three-dimensional parabolic equation acoustical propagation code. — 2006.

40. Тыщенко А. Г. AMPLE [Электронный ресурс]. — URL: https://github.com/GoldFeniks/AMPLE (дата обращения: 23.07.2024).

41. Tyshchenko A. G., Petrov P. S., Ehrhardt M. Wide-angle mode parabolic equation with transparent boundary conditions and its applications in shallow water acoustics // DAYS on Diffraction. — 2019. — P. 221.

42. Petrov P. S., Tyshchenko A. G. A numerical method for estimating anthropogenic acoustic noise levels using wide-angle Mode parabolic equations // Days on Diffraction. — 2022. — P. 48.

43. Tyshchenko A. G., Petrov P. S., Ehrhardt M. Wide-angle mode parabolic equation with transparent boundary conditions and its applications in shallow water acoustics // PACON-219. — 2019.

44. Тыщенко А. Г., Петров П. С. Комплекс программ для расчета акустических полей в мелком море на основе метода широкоугольных модовых параболических уравнений // XXXIV сессия Российского акустического общества. — 2022. — С. 656.

45. Тыщенко А. Г., Козицкий С. Б., Петров П. С. Метод расчёта векторных акустических полей на основе модовых параболических уравнений // XXXV сессия Российского акустического общества. — 2023. — С. 275.

46. Тыщенко А. Г., Козицкий С. Б., Петров П. С. Метод расчёта векторных акустических полей на основе модовых параболических уравнений // X конференция молодых ученых «Океанологические исследования». — 2023. — С. 70.

47. Wide-angle mode parabolic equations for the modelling of horizontal refraction in underwater acoustics and their numerical solution on unbounded domains / P. S. Petrov, M. Ehrhardt, A. G. Tyshchenko, P. N. Petrov // Journal of Sound and Vibration. — 2020. — Vol. 484. — P. 115526.

48. Комплекс программ для расчета акустических полей в мелком море на основе метода широкоугольных модовых параболических уравнений / А. Г. Тыщенко, О. С. Заикин, М. А. Сорокин, П. С. Петров // Акустический журнал. — 2021. — Июнь. — Т. 67, № 5. — С. 533—541.

49. Estimating Sound Exposure Levels Due to a Broadband Source over Large Areas of Shallow Sea / D. Manul'chev, A. Tyshchenko, M. Fershalov, P. Petrov // Journal of Marine Science and Engineering. — 2022. — Vol. 10, no. 1. — P. 82.

50. Современные методы расчета акустических полей в океане, основанные на их представлении в виде суперпозиции мод / А. Г. Тыщенко, С. Б. Козицкий, М. С. Казак, П. С. Петров // Акустический журнал. — 2023. — Июнь. — Т. 69, № 5. — С. 620—636.

51. Petrov P. S., Tyshchenko A. G., MacGillivray A. O. Three-dimensional modeling of underwater noise produced by a bulk carrier vessel and estimation of its environmental impact // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2024. — June. — Vol. 155, no. 6. — P. 3702–3714.

52. The Effects of Ship Noise on Marine Mammals—A Review / C. Erbe, S. A. Marley, R. P. Schoeman, J. N. Smith, L. E. Trigg, C. B. Embling // Frontiers in Marine Science. — 2019. — Vol. 6. — P. 606.

53. Impacts of anthropogenic noise on marine life: Publication patterns, new discoveries, and future directions in research and management / R. Williams, A. J. Wright, E. Ashe, L. K. Blight, R. Bruintjes, R. Canessa, C. Clark, S. Cullis-Suzuki, D. T. Dakin, C. Erbe, P. S. Hammond, N. D. Merchant, P. D. O'Hara, J. Purser, A. N. Radford, S. D. Simpson, L. Thomas, M. A. Wale // Ocean & Coastal Management. — 2015. — Vol. 115. — P. 17–24.

54. Calibrating and monitoring the western gray whale mitigation zone and estimating acoustic transmission during a 3D seismic survey, Sakhalin Island, Russia / A. Rutenko, S. Borisov, A. Gritsenko, M. Jenkerson // Environmental monitoring and assessment. — 2007. — Vol. 134, no. 1. — P. 21–44.

55. Responsible practices for minimizing and monitoring environmental impacts of marine seismic surveys with an emphasis on marine mammals / D. P. Nowacek, K. Bröker, G. Donovan, G. Gailey, R. Racca, R. R. Reeves, A. I. Vedenev, D. W. Weller, B. L. Southall // Aquatic Mammals. — 2013. — Vol. 39, no. 4. — P. 356.

56. Monitoring the acoustic field of seismic survey pulses in the near-coastal zone / A. Rutenko, D. Borovoi, V. Gritsenko, P. Petrov, V. Ushchipovskii, M. Boekholt // Acoustical Physics. — 2012. — Vol. 58, no. 3. — P. 326–338.

57. Bailey H., Brookes K. L., Thompson P. M. Assessing environmental impacts of offshore wind farms: lessons learned and recommendations for the future // Aquatic biosystems. — 2014. — Vol. 10, no. 1. — P. 1–13.

58. Monitoring the gray whale sound exposure mitigation zone and estimating acoustic transmission during a 4-D seismic survey, Sakhalin Island, Russia / R. Racca, M. Austin, A. Rutenko, K. Bröker // Endangered Species Research. — 2015. — Vol. 29, no. 2. — P. 131–146.

59. Lucke K., Martin S. B., Racca R. Evaluating the predictive strength of underwater noise exposure criteria for marine mammals // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2020. — Vol. 147, no. 6. — P. 3985.

60. Bröker K. C. Monitoring and mitigation of the sound effects of hydrocarbon exploration activities on marine mammal populations : PhD thesis / Bröker Koen C.A. — University of Groningen, 09/2021.

61. A Method for Estimating the Characteristics of Acoustic Pulses Recorded on the Sakhalin Shelf for Multivariate Analysis of their Effect on the Behavior of Gray Whales / A. Rutenko, V. Gritsenko, D. Kovzel, D. Manulchev, M. Y. Fershalov // Acoustical Physics. — 2019. — Vol. 65, no. 5. — P. 556–566.

62. Lin Y.-T., Duda T. F., Newhall A. E. Three-dimensional sound propagation models using the parabolic-equation approximation and the split-step Fourier method // Journal of Computational Acoustics. — 2013. — Vol. 21, no. 01. — P. 1250018.

63. Исследование возможности позиционирования автономных подводных аппаратов при выполнении ими глубоководных миссий / Ю. Н. Моргунов, С. И. Каменев, В. В. Безответных, П. С. Петров // Подводные исследования и робототехника. — 2019.

64. Эксперементальное и теоретическое исследование времен прихода и эффективных скоростей при дальнем распространении импульсных акустических сигналов вдоль кромки шельфа в мелком море / П. С. Петров, А. А. Голов, В. В. Безответных, А. В. Буренин, С. Б. Козиц-

кий, М. А. Сорокин, Ю. Н. Моргунов // Акустический журнал. — 2020. — Т. 66, № 1. — С. 20—33.

65. Proposed alignment of measurement and analysis procedures for quiet ship certifications : tech. rep. / M. Ainslie, D. Hannay, A. MacGillivray, K. Trounce, K. Lucke ; Technical memorandum, Document. — 2021.

66. Source spectrum model for merchant ship radiated noise in the Yellow Sea of China / P. Jiang, J. Lin, J. Sun, X. Yi, Y. Shan // Ocean Engineering. — 2020. — Vol. 216. — P. 107607.

67. MacGillivray A., Jong C. de. A reference spectrum model for estimating source levels of marine shipping based on Automated Identification System data // Journal of Marine Science and Engineering. — 2021. — Vol. 9, no. 4. — P. 369.

68. Wales S. C., Heitmeyer R. M. An ensemble source spectra model for merchant ship-radiated noise // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2002. — Vol. 111, no. 3. — P. 1211–1231.

69. Averaging underwater noise levels for environmental assessment of shipping / N. D. Merchant, P. Blondel, D. T. Dakin, J. Dorocicz // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2012. — Vol. 132, no. 4. — EL343–EL349.

70. Analysis and modeling of 255 source levels of merchant ships from an acoustic observatory along St. Lawrence Seaway / Y. Simard, N. Roy, C. Gervaise, S. Giard // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2016. — Vol. 140, no. 3. — P. 2002–2018.

71. Underwater Noise from Large Commercial Ships – International Collaboration for Noise Reduction / B. L. Southall, A. R. Scholik-Schlomer, L. Hatch, T. Bergmann, M. Jasny, K. Metcalf, L. Weilgart, A. J. Wright //

Encyclopedia of Maritime and Offshore Engineering. — John Wiley, Sons, Ltd, 2017. — P. 1–9.

72. Marine mammal noise exposure criteria: Updated scientific recommendations for residual hearing effects / B. L. Southall, J. J. Finneran, C. Reichmuth, P. E. Nachtigall, D. R. Ketten, A. E. Bowles, W. T. Ellison, D. P. Nowacek, P. L. Tyack // Aquatic Mammals. — 2019. — Vol. 45, no. 2. — P. 125–232.

73. The Effects of Ship Noise on Marine Mammals – A Review / C. Erbe, S. A. Marley, R. P. Schoeman, J. N. Smith, L. E. Trigg, C. B. Embling // Frontiers in Marine Science. — 2019. — Vol. 6.

74. Passive geoacoustic inversion with a single hydrophone using broadband ship noise / C. Gervaise, B. G. Kinda, J. Bonnel, Y. Stéphan, S. Vallez // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2012. — Vol. 131, no. 3. — P. 1999–2010.

75. Knobles D. P. Maximum entropy inference of seabed attenuation parameters using ship radiated broadband noise // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2015. — Vol. 138, no. 6. — P. 3563–3575.

76. Probabilistic estimation of merchant ship source levels in an uncertain shallow-water environment / D. Tollefsen, W. S. Hodgkiss, S. E. Dosso, J. Bonnel, D. P. Knobles // IEEE Journal of Oceanic Engineering. — 2021. — Vol. 47, no. 3. — P. 647–656.

77. Sturm F. Leading-order cross term correction of three-dimensional parabolic equation models // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2016. — Vol. 139, no. 1. — P. 263–270.

78. Özkan Sertlek H., Ainslie M. A. A depth-dependent formula for shallow water propagation // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2014. — Vol. 136, no. 2. — P. 573–582.

79. Sertlek H. Ö., Ainslie M. A., Heaney K. D. Analytical and numerical propagation loss predictions for gradually range-dependent isospeed waveguides // IEEE Journal of Oceanic Engineering. — 2018. — Vol. 44, no. 4. — P. 1240–1252.

80. Petrov P. S., Ehrhardt M., Kozitskiy S. B. A generalization of the split-step Padé method to the case of coupled acoustic modes equation in a 3D waveguide // Journal of Sound and Vibration. — 2024. — Vol. 577. — art. no. 118304.

81. The BELLHOP Manual and User's Guide [Electronic Resource]. — URL: http://oalib.hlsresearch.com/Rays/HLS-2010-1.pdf (visited on 07/23/2024).

82. Calazan R. M., Rodríguez O. C. TRACEO3D Ray Tracing Model for Underwater Noise Predictions // Technological Innovation for Smart Systems. — Springer International Publishing, 2017. — P. 183–190.

83. Isakson M. J., Goldsberry B., Chotiros N. P. A three-dimensional longitudinally-invariant finite element model for acoustic propagation in shallow water waveguides // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2014. — Vol. 136, no. 3. — EL206.

84. Lin Y.-T., Collis J. M., Duda T. F. A three-dimensional parabolic equation model of sound propagation using higher-order operator splitting and Padé approximants // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2012. — Vol. 125, no. 5. — EL364.

85. Petrov P. S., Zaikin O., Tyshchenko A. G. Cambala [Электронный ресурс]. — URL: https://github.com/Nauchnik/CAMBALA (дата обращения: 23.07.2024).

86. Авилов К. В. Псевдодифференциальные параболические уравнения рас пространения звука в океане, плавно неоднородном по горизонтали, и их численное решени // Акустический журнал. — 1995. — Т. 41, № 1. — С. 5—12.

87. Collins M. D. A split-step Padé solution for the parabolic equation method // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1993. — Vol. 93, no. 4. — P. 1736–1742.

88. Computational Ocean Acoustics / F. A. Jensen, W. Kuperman, M. Porter, H. Schmidt. — 2nd ed. — New York : Springer, 2011.

89. Свешников А. Принцип излучения // Доклады академии наук. Т. 73. — 1950. — С. 917—920.

90. Алексеев Г. В. Метод нормальных волн в подводной акустике. — Дальнаука, 2006.

91. Diffraction by a Defect in an Open Waveguide: A Mathematical Analysis Based on a Modal Radiation Condition / A.-S. B.-B. Dhia, G. Dakhia, C. Hazard, L. Chorfi // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 2009. — Vol. 70, no. 3. — P. 677–693.

92. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type // P. Adv Comput Math. — 1996. — Vol. 6, no. 1. — P. 207–226.

93. Chui S. L., Lu Y. Y. A propagator-/spl theta/ beam propagation method // IEEE Photonics Technology Letters. — 2004. — Vol. 16, no. 3. — P. 822–824.

94. Antoine X., Huang Y., Lu Y. Y. Computing High-Frequency Scattered Fields by Beam Propagation Methods: A Prospective Study // Journal of Algorithms & Computational Technology. — 2010. — Vol. 4, no. 2. — P. 147–166.

95. Heavyside “Cover-up” Method for Partial Fractions [Электронный ресурс]. — URL: http://www.math-cs.gordon.edu/courses/ma225/handouts/heavyside.pdf (дата обращения: 23.07.2024).

96. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing / W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. — 3rd ed. — Cambridge University Press, 2007.

97. Абрамов А. А., Андреев В. Б. О применении метода прогонки к нахождению периодических решенений дифференциальных и разностных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1963. — Vol. 3, no. 2. — P. 377–381.

98. Berenger J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // Journal of Computational Physics. — 1994. — Vol. 114, no. 2. — P. 185–200.

99. Levy M. F. Perfectly Matched Layer Truncation for Parabolic Wave Equation Models // Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2001. — Vol. 457, no. 2015. — P. 2609–2624.

100. Lu Y. Y., Zhu J. Perfectly matched layer for acoustic waveguide modeling — benchmark calculations and perturbation analysis // Computer Modeling in Engineering & Sciences. — 2007. — Vol. 22, no. 3. — P. 235–248.

101. Baskakov V., Popov A. Implementation of transparent boundaries for numerical solution of the Schrödinger equation // Wave Motion. — 1991. — Vol. 14, no. 2. — P. 123–128.

102. Marcus S. W. A generalized impedance method for application of the parabolic approximation to underwater acoustics // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1991. — July. — Vol. 90, no. 1. — P. 391–398.

103. Ehrhardt M. Discrete artificial boundary conditions : PhD thesis / Ehrhardt Matthias. — Technische Universität Berlin, 2002.

104. A Review of Transparent and Artificial Boundary Conditions Techniques for Linear and Nonlinear Schrödinger Equations / X. Antoine, A. Arnold, C. Besse, M. Ehrhardt, a. schaedle achim // Communications in Computational Physics. — 2008. — Oct. — Vol. 4. — P. 729–796.

105. Arnold A., Ehrhardt M. Discrete Transparent Boundary Conditions for Wide Angle Parabolic Equations in Underwater Acoustics // Journal of Computational Physics. — 1998. — Vol. 145, no. 2. — P. 611–638.

106. Lynn P. A. The Laplace Transform and the z-transform // Electronic Signals and Systems. — London : Macmillan Education UK, 1986. — P. 225–272.

107. Burridge R., Weinberg H. Horizontal rays and vertical modes // Wave Propagation and Underwater Acoustics. — 1977. — P. 86–152.

108. Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I. Vol. 8. — 2nd ed. — Springer, 1993. — (Springer Series in Computational Mathematics).

109. Зорич В. Математический анализ. Т. 3. — 9-е изд. — МЦНМО, 2019.

110. Davis P. J., Rabinowitz P. Chapter 2 - Approximate Integration over a Finite Interval // Methods of Numerical Integration (Second Edition) / ed. by P. J. Davis, P. Rabinowitz. — 2nd ed. — Academic Press, 1984. — P. 51–198.

111. Тыщенко А. Г. Решение широкоугольного параболического уравнения с условиями прозрачной границы при моделировании распространения звука в трёхмерных волноводах мелкого моря : Выпускная квалификационная работа / Тыщенко А. Г. — Дальневосточный Федеральный Университет, 2019.

112. C++ Standard [Электронный ресурс]. — URL: https://isocpp.org/ (дата обращения: 23.07.2024).

113. Boost [Электронный ресурс]. — URL: https://www.boost.org/ (дата обращения: 23.07.2024).

114. nlohmann/json [Электронный ресурс]. — URL: https://github.com/nlohmann/json (дата обращения: 23.07.2024).

115. FFTW [Электронный ресурс]. — URL: http://www.fftw.org/ (дата обращения: 23.07.2024).

116. Frigo M., Johnson S. G. The Design and Implementation of FFTW3 // Proceedings of the IEEE. — 2005. — Vol. 93, no. 2. — P. 216–231.

117. JSON [Электронный ресурс]. — URL: http://www.json.org/json-ru.html (дата обращения: 23.07.2024).

118. Тыщенко А. Г. DORK [Электронный ресурс]. — URL: https://github.com/GoldFeniks/DORK (дата обращения: 23.07.2024).

119. Тыщенко А. Г. delaunay [Электронный ресурс]. — URL: https://github.com/GoldFeniks/delaunay (дата обращения: 23.07.2024).

120. Sinclair D. S-hull [Электронный ресурс]. — URL: http://www.s-hull.org/ (дата обращения: 23.07.2024).

121. Тыщенко А. Г. zip [Электронный ресурс]. — URL: https://github.com/GoldFeniks/zip (дата обращения: 23.07.2024).

122. Eigen v3 [Электронный ресурс] / G. Guennebaud, B. Jacob [и др.]. — 2010. — URL: http://eigen.tuxfamily.org (дата обращения: 23.07.2024).

123. Meijering E. A Chronology of Interpolation: From Ancient Astronomy to Modern Signal and Image Processing // Proceedings of the IEEE. — 2002. — Vol. 90, no. 3. — P. 319–342.

124. Yehong L., Guosheng Y. Nonparametric Functional Approximation with Delaunay Triangulation [Электронный ресурс]. — URL: https://arxiv.org/pdf/1906.00350.pdf (дата обращения: 23.07.2024).

125. Optional [Электронный ресурс]. — URL: https://en.cppreference.com/w/cpp/utility/optional (дата обращения: 23.07.2024).

126. IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic // ANSI/IEEE Std 754-1985. — 1985. — P. 1–20.

127. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — 4-е изд. — Издательство ”Лань”, 2021.

128. Hankel Function of the First Kind [Электронный ресурс]. — URL: http://mathworld.wolfram.com/HankelFunctionoftheFirstKind.html (дата обращения: 23.07.2024).

129. Deane G. B., Buckingham M. J. An analysis of the three-dimensional sound field in a penetrable wedge with a stratified fluid or elastic basement // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1993. — Vol. 93, no. 3. — P. 1319–1328.

130. On the Method of Source Images for the Wedge Problem Solution in Ocean Acoustics: Some Corrections and Appendices / J. Tang, P. Petrov, S. Piao, S. Kozitskiy // Acoustical Physics. — 2018. — Mar. — Vol. 64. — P. 225–236.

131. Щуров В. Векторная акустика океана. — Федеральное государственное унитарное предприятие Издательство Дальнаука, 2003.

132. The solution of sound propagation modeling problems for environment impact assessment by the mode parabolic equations method / A. G. Tyshchenko, M. A. Sorokin, S. B. Kozitskiy, P. S. Petrov // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2024. — Нояб. — Т. 156, № 5. — С. 3306—3319.

133. Source and propagation modelling scenarios for environmental impact assessment: Verification / M. A. Ainslie, R. M. Laws, M. J. Smith, A. O. MacGillivray // The Journal of the Acoustical Society of America. —.

134. Ainslie M. A., Laws R. M., Sertlek H. Ö. International Airgun Modeling Workshop: Validation of Source Signature and Sound Propagation Models—Dublin (Ireland), July 16, 2016—Problem Description // IEEE Journal of Oceanic Engineering. — 2019. — Vol. 44, no. 3. — P. 565–574.

135. A functional regression analysis of vessel source level measurements from the Enhancing Cetacean Habitat and Observation (ECHO) database / A. O. MacGillivray, L. M. Ainsworth, J. Zhao, J. N. Dolman, D. E. Hannay, H. Frouin-Mouy, K. B. Trounce, D. A. White // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2022. — Sept. — Vol. 152, no. 3. — P. 1547–1563.

136. International harmonization of procedures for measuring and analyzing of vessel underwater radiated noise / M. A. Ainslie, S. B. Martin, K. B. Trounce, D. E. Hannay, J. M. Eickmeier, T. J. Deveau, K. Lucke, A. O. MacGillivray, V. Nolet, P. Borys // Marine Pollution Bulletin. — 2022. — Vol. 174. — P. 113124.

137. Ainslie M. A., Halvorsen M. B., Robinson S. P. A terminology standard for underwater acoustics and the benefits of international standardization // IEEE Journal of Oceanic Engineering. — 2021. — Vol. 47, no. 1. — P. 179–200.

138. Hannay D. E., Mouy X., Li Z. An automated real-time vessel sound measurement system for calculating monopole source levels using a modified version of ANSI/ASA S12.64-2009 // Canadian Acoustics. — 2016. — Aug. — Vol. 44, no. 3.

139. Underwater acoustics – Terminology : Standard / International Organization for Standardization. — Geneva, CH, 2017.

140. Garnett R. Bayesian Optimization. — Cambridge University Press, 2023.

141. Genton M. Classes of Kernels for Machine Learning: A Statistics Perspective. // Journal of Machine Learning Research. — 2001. — Jan. — Vol. 2. — P. 299–312.

142. Nogueira F. Bayesian Optimization: Open source constrained global optimization tool for Python. — 2014–.

143. TensorFlow: Large-Scale Machine Learning on Heterogeneous Systems / Martín Abadi, Ashish Agarwal, Paul Barham, Eugene Brevdo, Zhifeng Chen, Craig Citro, Greg S. Corrado, Andy Davis, Jeffrey Dean, Matthieu Devin, Sanjay Ghemawat, Ian Goodfellow, Andrew Harp, Geoffrey Irving, Michael Isard, Y. Jia, Rafal Jozefowicz, Lukasz Kaiser, Manjunath Kudlur, Josh Levenberg, Dandelion Mané, Rajat Monga, Sherry Moore, Derek Murray, Chris Olah, Mike Schuster, Jonathon Shlens, Benoit Steiner, Ilya Sutskever, Kunal Talwar, Paul Tucker, Vincent Vanhoucke, Vijay Vasudevan, Fernanda Viégas, Oriol Vinyals, Pete Warden, Martin Wattenberg, Martin Wicke, Yuan Yu, Xiaoqiang Zheng. — 2015.

144. Katsnelson B., Petnikov V., Lynch J. Fundamentals of Shallow Water Acoustics. — 1st ed. — New York : Springer, 2012.

145. Zavorokhin G., Matskovskiy A. A Nonstationary Problem of Diffraction of Acoustic Waves from a Point Source by an Interface of Two Half-Planes with Positive Effective Curvature // Journal of Mathematical Sciences. — 2021. — Feb. — Vol. 252. — P. 612–618.

146. Monitoring of anthropogenic noise on the shelf of the Sakhalin Island during seismic surveys / A. Rutenko, A. Gavrilevsky, V. Putov, A. Soloviev,

D. Manulchev // Acoustical Physics. — 2016. — Vol. 62, no. 3. — P. 348–362.

147. Trofimov M. Y., Kozitskiy S. B., Zakharenko A. D. A mode parabolic equation method in the case of the resonant mode interaction // Wave Motion. — 2015. — Vol. 58. — P. 42–52.

148. Trofimov M. Y., Kozitskiy S. B., Zakharenko A. D. Simulation of the pulse propagation by the interacting mode parabolic equation method // Computer Physics Communications. — 2018. — Vol. 228. — P. 54–60.

149. Cybulski J. Probable origin of measured supertanker radiated noise spectra // OCEANS'77 Conference Record. — IEEE. 1977. — P. 184–191.

150. Gassmann M., Wiggins S. M., Hildebrand J. A. Deep-water measurements of container ship radiated noise signatures and directionality // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2017. — Sept. — Vol. 142, no. 3. — P. 1563–1574.

151. Urazghildiiev I. R., Hannay D. E. Localization of ship noise feasbility and application study: Using the Boundary Pass Underwater Listening Station compact acoustic arrays : Technical report for the Enchancing Cetacean Habitat and Observation (ECHO) Program / Enchancing Cetacean Habitat ; Observation (ECHO) Program. — Vancouver, British Columbia, 2021. — JASCO document 02380.

152. Nonlinear time-warping made simple: A step-by-step tutorial on underwater acoustic modal separation with a single hydrophone / J. Bonnel, A. Thode, D. Wright, R. Chapman // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2020. — Vol. 147, no. 3. — P. 1897–1926.

153. Lunkov A., Sidorov D., Petnikov V. Horizontal Refraction of Acoustic Waves in Shallow-Water Waveguides Due to an Inhomogeneous Bottom

Structure // Journal of Marine Science and Engineering. — 2021. — Vol. 9, no. 11. — P. 1269.

Приложение A

Примеры конфигурационного файла


```json
{
    "ppm": 10,
    "y0": -4000,
    "y1": 4000,
    "ny": 8001,
    "x0": 50,
    "x1": 10000,
    "nx": 10001,
    "z0": 30,
    "z1": 30,
    "nz": 1,
    "mny": 2,
    "z_s": 100,
    "init": "ray_simple",
    "a0": -1.57,
    "a1":  1.57,
    "coefficients": {
        "type": "ssp",
        "parameters": { "n": 17 }
    },
    "input_data": [
        {
            "type": "frequencies",
            "dimensions": [ 1 ],
            "values": [ 25 ]
        },
        {
            "type": "bathymetry",
            "dimensions": [ 2, 2 ],
            "values": [
                [200, 200],
                [200, 200]
            ]
        },
        {
            "type": "hydrology",
            "dimensions": [ 2, 2 ],
            "values": [
                [1500, 1500],
                [1500, 1500]
            ]
        }
    ]
}
```

```
{
    "ppm": 10,
    "y0": -3320,
    "y1": 3320,
    "ny": 6641,
    "x0": 50,
    "x1": 25000,
    "nx": 25001,
    "z0": 30,
    "z1": 30,
    "nz": 1,
    "mny": 1661,
    "z_s": 100,
    "init": "ray_simple",
    "a0": -1.57,
    "a1":  1.57,
    "coefficients": {
        "type": "ssp",
        "parameters": { "n": 13 }
    },
    "input_data": [
        {
            "type": "frequencies",
            "dimensions": [ 1 ],
            "values": [ 25 ]
        },
        {
            "type": "bathymetry",
            "dimensions": [
                2,
                {
                    "n": 2,
                    "bounds": { "a": -4000, "b":  4000 }
                }
            ],
            "values": [
                [0, 400],
                [0, 400]
            ]
        },
        {
            "type": "hydrology",
            "dimensions": [ 2, 2 ],
            "values": [
                [1500, 1500],
                [1500, 1500]
            ]
        }
    ]
}
```

```
{
    "ppm": 10,
    "y0": -3000,
    "y1": 3000,
    "ny": 6001,
    "x0": 50,
    "x1": 10000,
    "nx": 10001,
    "z0": 10,
    "z1": 10,
    "nz": 1,
    "z_s": 10,
    "bottom_rhos": [2],
    "bottom_c1s": [1800],
    "bottom_c2s": [1800],
    "init": "ray_simple",
    "a0": -1.5,
    "a1":  1.5,
    "coefficients": {
        "type": "ssp",
        "parameters": { "n": 11 }
    },
    "input_data": [
        {
            "type": "frequencies",
            "dimensions": [ 1 ],
            "values": [ 150 ]
        },
        {
            "type": "bathymetry",
            "dimensions": [
                2,
                {
                    "n": 1001,
                    "bounds": { "a": -3000, "b":  3000 }
                }
            ],
            "values": "bathymetry.txt"
        },
        {
            "type": "hydrology",
            "dimensions": [ 2, 2 ],
            "values": [
                [1500, 1500],
                [1500, 1500]
            ]
        }
    ]
}
```