

## НЕСАМОСОПРЯЖЁННАЯ МОДЕЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ПЕКЕРИСА

**Касаткин Б.А., Злобина Н.В., Касаткин С.Б.**

*Институт проблем морских технологий им. академика Агеева М.Д., г. Владивосток,  
kasatkas@marine.febras.ru*

Хорошо известно, что все операторы, описывающие те или иные граничные задачи (ГЗ), делятся на самосопряжённые и несамопряжённые. С точки зрения математики, их различие заключается в том, что спектр собственных значений самосопряжённого оператора является вещественным, тогда как спектр собственных значений несамопряжённого оператора является комплексным, а, следовательно, комплексно-сопряжённым. С точки зрения физики, самосопряжённый оператор описывает консервативную систему, в которой отсутствуют какие-либо потери энергии. К таким потерям можно отнести потери на поглощение звука, потери на излучение через границы раздела, потери на трансформацию волн одного типа в волны другого типа. С этой точки зрения слоистые волноводы, нагруженные на полупространство, жидкое или твёрдое, являются открытыми системами с неизбежными потерями энергии на излучение через границы раздела при углах падения, меньших критического значения. Следовательно, несамопряжённые операторы должны играть важную роль при решении ГЗ в акустике слоистых сред. К таким задачам, безусловно, относится и граничная задача Пекериса, лежащая в основе целого направления в теоретической и прикладной гидроакустике. Такая задача была поставлена и решена Пекерисом в работе [1] с использованием собственных функций несамопряжённого оператора, описывающего ГЗ. Однако полученное решение не обладает свойством полноты, т.к. оно получено с использованием собственных функций только одного оператора, какими являются расходящиеся волны. В результате решение оказалось корректным только при описании звукового поля в самом волноводе, но не в полупространстве, где амплитуда вытекающих волн комплексного спектра экспоненциально растёт с глубиной. Другое решение той же ГЗ Пекериса было получено Бреховских Л.М. в работе [2] в самосопряжённой модельной постановке, что обеспечило корректность решения во всей заявленной области определения волновод плюс полупространство. Наконец, в историческом плане следует отметить ещё два решения [3]-[4] той же ГЗ, полученные с использованием собственных функций несамопряжённого оператора

(расходящихся волн), корректные только при описании звукового поля в самом волноводе, но не в полупространстве. Нетривиальность ситуации заключается в том, что все четыре решения получены в классе аналитических функций на плоскости комплексного переменного, но с различным выбором разреза, определяющего однозначную ветвь радикала, каким является вертикальное волновое число в полупространстве. Понятно, что эта ситуация с множеством различных решений ГЗ Пекериса противоречит определению корректно поставленной ГЗ, приведённому в работе [5]. Ситуация разрешается тривиальным образом, если каждому решению ГЗ сопоставить свою модельную постановку, в рамках которой это решение будет корректным (единственным). Так, например, решения [1], [3]-[4] являются корректными решениями редуцированной ГЗ для волновода с граничным условием смешанного (импедансного) типа. В этой модельной постановке полупространство не входит в область определения решения, но представлено своим входным импедансом в граничном условии смешанного типа. Сам импеданс определён различным образом для различных разрезов, что обеспечивает единственность решения в каждом конкретном случае выбора разреза. И только решение [2], которое будем называть классическим решением, полученное в самосопряжённой модельной постановке, является корректным (единственным) решением в классе аналитических функций во всей заявленной области определения волновод плюс полупространство. Простота и «гладкость» классического решения, а также возможность его обобщения на более сложные волноводы, неоднородные, слоистые, нерегулярные, обеспечило его исключительную популярность в теоретической и прикладной акустике [6]-[12].

Однако это не исключает существование других решений той же ГЗ в других классах функций и в другой модельной постановке. Первоначально иное решение ГЗ Пекериса с использованием собственных функций двух сопряжённых операторов было получено в работах [13]-[14], а в работе [15] были описаны ещё два решения той же ГЗ. Одно из них получено в классе функций, представимых интегралом Фурье-Бесселя. В этом решении жидкий слой играет роль резонатора (а не волновода), нагруженного на полупространство, в котором горизонтальный поток мощности тождественно равен нулю, а отличен от нуля вертикальный поток мощности в полупространство, играющее роль нагрузки на резонатор. Другое решение, которое будем называть обобщённым, построено в не-самосопряжённой модельной постановке с использованием собственных функций двух сопряжённых операторов, допускающей их взаимную трансформацию на горизонтах трансформации, играющих роль горизонтов полного внутреннего отражения (в терминологии И. Ньютона). Таковыми собственными функциями являются расходящиеся (прямые) волны и

сходящиеся (обратные) волны отдачи. Обобщённость решения объясняется тем, что на горизонтах трансформации, подлежащих определению в каждом конкретном случае, допускается разрывность решения одновременно и по давлению, и по нормальной компоненте вектора колебательной скорости. Единственность и физическая корректность обобщённого решения обеспечивается тем, что только в случае одновременной разрывности и по давлению, и по нормальной компоненте вектора колебательной скорости на горизонтах трансформации генерируется вертикальная компонента вектора интенсивности с периодом  $\lambda/2$  ( $\lambda$ -длина волны), а поток мощности через горизонт трансформации тождественно равен нулю. Учитывая важность несамосопряжённой модельной постановки ГЗ в акустике слоистых сред, сформулируем основные её положения.

1.-Полнота решения ГЗ в несамосопряжённой модельной постановке обеспечивается совместным участием собственных функций двух сопряжённых операторов с возможной их взаимной трансформацией на горизонтах трансформации, подлежащих определению.

2.-Единицей волнового движения в несамосопряжённой модельной постановке ГЗ Пекериса являются комбинационные волны (КВ), содержащие регулярную и обобщённую составляющие. Для КВ с вещественными горизонтальными волновыми числами регулярная составляющая продолжается в полупространство неоднородной волной, амплитуда которой экспоненциально убывает в полупространстве. Обобщённая составляющая продолжается в полупространство неоднородной волной, амплитуда которой экспоненциально растёт в полупространстве до горизонта трансформации. Ниже горизонта трансформации, играющего роль горизонта полного внутреннего отражения, обобщённая волна продолжается неоднородной сходящейся волной отдачи, амплитуда которой экспоненциально убывает. Иначе говоря, обобщённые нормальные волны всегда являются гибридными волнами. Для КВ с комплексными горизонтальными волновыми числами регулярная составляющая преломляется в полупространство под положительным углом преломления, а обобщённая составляющая преломляется под отрицательным углом преломления с последующим зеркальным отражением от оси симметрии как от жёсткой границы. В результате двойного лучепреломления формируется коридор вытекания, играющий роль волновода в полупространстве, в котором поток мощности (с цилиндрической расходимостью) отличен от нуля. Его границы играют роль горизонтов трансформации, а вне коридора вытекания формируется поле стоячих волн, в котором генерируются мелкомасштабные (с периодом  $\lambda/2$ ) знакопеременные вихревые структуры.

3.-Несамосопряжённая модельная постановка ГЗ Пекериса допускает активизацию комплексного углового спектра модельного (точечного)

источника [15]. При его активизации генерируется неоднородная обобщённая волна Брюстера (нулевая мода), локализованная на горизонте источника, соответствующая корню характеристического уравнения для границы раздела двух жидких полупространств.

4.-Трансформация КВ с комплексными горизонтальными волновыми числами в КВ с вещественными горизонтальными волновыми числами происходит на частотах продольного резонанса, которые являются кратными корнями дисперсионного уравнения для волновода Пекериса. Условием реализации продольного резонанса является равенство нулю реактивного входного импеданса для горизонтального волнового движения. На частотах продольного резонанса генерируются две обобщённые волны. Одна из них является расходящейся волной с положительно определёнными фазовой и групповой скоростью. Другая является сходящейся волной отдачи с положительно определённой групповой скоростью. Последнее обстоятельство является основанием для корректировки условий излучения и, соответственно, для включения этой волны в суммарное решение. Амплитуда звукового давления на частоте продольного резонанса имеет корневую особенность и аномальную зависимость от расстояния (в идеальном резонаторе без потерь),  $p(\omega) = O((\delta\omega)^{-1/2})$ ,  $\delta\omega = |\omega - \omega_p|$ ,  $p(r) = O(r^{1/2})$ ,  $\omega_p$  - частота продольного резонанса [13].

5.-Трансформация сходящейся волны отдачи в регулярную нормальную волну происходит на частотах поперечного резонанса, соответствующих критическому углу падения. Условием реализации поперечного резонанса (антирезонанса) является равенство нулю реактивной проводимости нагрузки (полупространства) для поперечного волнового движения. Амплитуда трансформирующихся волн на частоте антирезонанса равна нулю, что обеспечивает непрерывность модельного решения на частотах поперечного резонанса.

6.-Резонансный характер возбуждения нормальных волн на частотах продольного и поперечного резонансов в волноводе Пекериса полностью аналогичен возбуждению квазипродольных волн на частотах продольного резонанса и квазипоперечных волн на частотах поперечного резонанса в твёрдых волноводах типа пластин, стержней, цилиндров, звуковое поле в которых также описывается несамосопряжёнными операторами [16]. Сам процесс возбуждения продольных резонансов с участием обратных волн с положительно определённой групповой скоростью в волноводной системе, размер которой не ограничен в продольном направлении, является фундаментальным явлением, корректное описание которого возможно только в несамосопряжённой модельной постановке соответствующей ГЗ.

### Особенности модельного решения ГЗ Пекериса в несамосопряжённой модельной постановке.

Комплексный спектр собственных значений несамосопряжённого оператора, описывающего ГЗ Пекериса, и типы волн, формирующих суммарное звуковое поле, показаны на рис. 1. Рисунок соответствует представлению вертикального волнового числа в полупространстве в форме  $k_{32} = a_2 \pm i\alpha_2$ ,  $a_2 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$ . Жирной линией на рисунке отмечены полюсы и направление их миграции с ростом частоты, которым соответствуют нормальные волны, одновременно удовлетворяющие условию погашаемости на бесконечности в полупространстве. Отдельные полюсы помечены обозначениями  $n(1)$ ,  $n(2)$ ,  $n(3)$  для расходящихся волн и обозначениями  $\bar{n}(2)$ ,  $\bar{n}(3)$  для обратных волн, также входящих в суммарное решение. Нормальные волны семейства  $n(1)$ , которые продолжаютя в полупространстве неоднородной волной с убывающей амплитудой, являются регулярными составляющими обобщённого решения. Нормальные волны семейства  $n(2)$  продолжаютя в полупространство неоднородной волной с растущей амплитудой и являются обобщёнными составляющими. После регуляризации математического описания этих волн с использованием механизма трансформации на горизонтах полного внутреннего отражения они становятся гибридными волнами. Нормальные волны семейства  $n(3)$  являются вытекающими (втекающими) волнами комплексного спектра. В суммарное решение входят те волны комплекс-

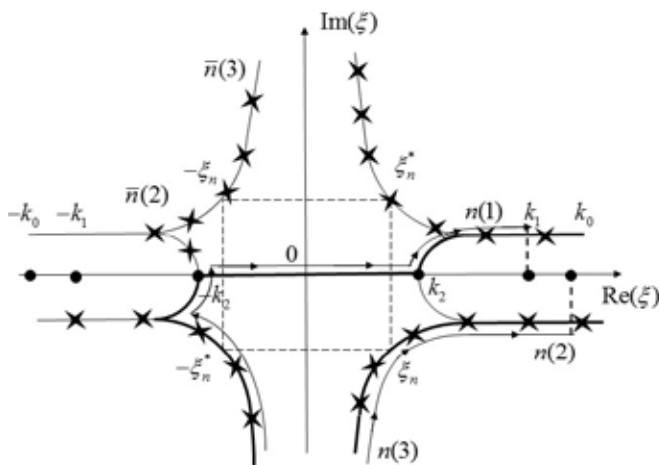
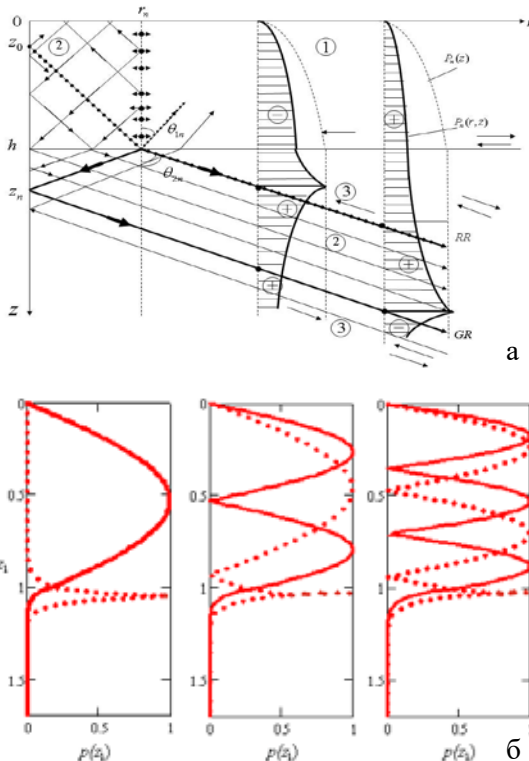


Рис. 1. Расположение полюсов на плоскости комплексного спектрального параметра, соответствующих подмножествам  $n(1)$ ,  $n(2)$ ,  $n(3)$  нормальных волн,  $k_1$ ,  $k_2$ -волновые числа в волноводе и полупространстве,  $k_0$ -волновое число волны Брюстера.

ного спектра с горизонтальными волновыми числами  $(\xi_n, -\xi_n^*)$ , которые одновременно удовлетворяют условию погашаемости на бесконечности в полупространстве. Подробное описание структуры нормальных волн и способа построения обобщённого решения с использованием соотношений обобщённой ортогональности приведено в работах [13]-[15].

Парная структура вытекающих КВ комплексного спектра с волновыми числами  $(\xi_n, -\xi_n^*)$  представлена на рис. 2а. Присутствие в паре волн обратной волны предполагает механизм её отражения от оси симметрии, играющей роль жёсткой границы, и механизм вытекания в соответствующий коридор вытекания, играющий роль волновода в полупространстве. Любая пара вытекающих нормальных волн образует расходящуюся волну с цилиндрической расходимостью в коридоре вытекания и поле стоячих волн вне коридора. Жидкий слой играет роль резонатора, который нагружается на полупространство своей центральной частью  $(z = h, r \leq r_n)$ .



который нагружается на полупространство своей центральной частью  $(z = h, r \leq r_n)$ .

Цифрой 1 на рисунке помечен резонатор, цифрой 2 помечена его центральная часть и коридор вытекания в полупространстве, где потоки мощности являются однонаправленными, положительно определёнными. Коридор вытекания ограничен сверху лучом RR с регулярным законом преломления расходящейся волны, и снизу лучом GR с обобщённым законом преломления. Этому закону соответствует преломлённая сходящаяся волна отдачи, которая становится расходящейся волной только после отражения от оси симметрии как от

Рис. 2. Схема формирования комбинационных волн: а)- с комплексными волновыми числами, б)- с вещественными волновыми числами.

жёсткой границы. Цифрой 3 на рисунке помечены области в полупространстве (буферные зоны), где потоки мощности являются встречными, полностью скомпенсированными. Все вытекающие нормальные волны комплексного спектра являются обобщёнными нормальными волнами, разрывными на границах коридора вытекания.

Пара нормальных волн, регулярная и обобщённая, которые зарождаются на частотах продольного резонанса, образуют КВ с вещественными горизонтальными волновыми числами. Парная структура нормальных волн вещественного спектра и формирование горизонтов полного внутреннего отражения поясняется рис. 2б. Для регулярной составляющей КВ входной импеданс полупространства является реактивным, инерционным. Для обобщённой составляющей КВ входной импеданс полупространства является реактивным, упругим. На границе раздела регулярная и обобщённая составляющие имеют равные амплитуды. Равенство амплитуд сопряжённых нормальных волн на границе раздела, формирующих КВ, обеспечивает максимум компенсации реактивной составляющей входного импеданса полупространства и максимум прозрачности границы раздела по потоку мощности при углах падения, больших критического значения.

**Модельное описание звуковых полей на частотах, меньших первой критической частоты модельного волновода.**

Модельное описание пространственной структуры поля звукового давления в сравниваемых модельных постановках в диапазоне частот, меньших или равных первой частоте продольного резонанса модельного волновода, поясняется рис. 3–5. Пространственные координаты ( $r, z$ ) и горизонт источника  $z_0$  нормированы на глубину волновода  $h, k$ , -волновое число в волноводе. Звуковое поле в этом диапазоне частот в классическом решении описывается составляющими сплошного спектра и носит вырожденный характер. Само вырождение проявляется в том, что амплитуда звукового давления убывает с квадратом расстояния, а максимум звукового поля соответствует границе раздела волновод-полупространство. В обобщённом решении основной вклад в суммарное звуковое

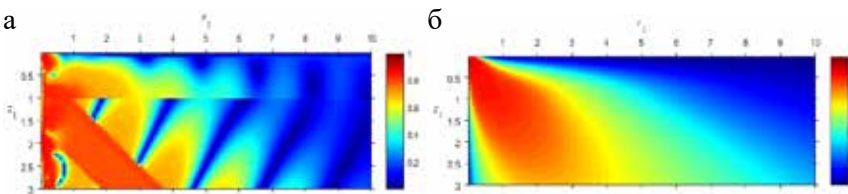


Рис. 3. Обобщенное решение (а) и классическое решение (б);  $k_1 h = 2$ ;  $z_{01} = 0,1$

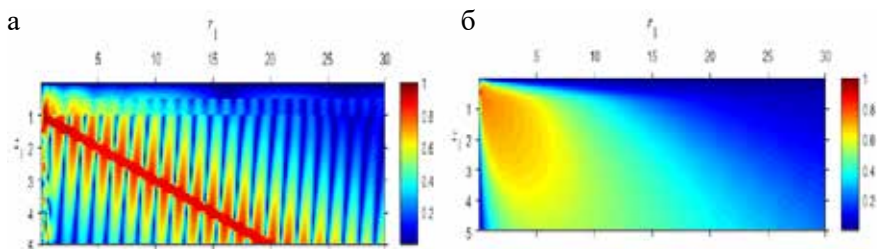


Рис. 4. Обобщенное решение (а) и классическое решение (б);  $k_1h=2.65, z_{0l}=0.5$ .

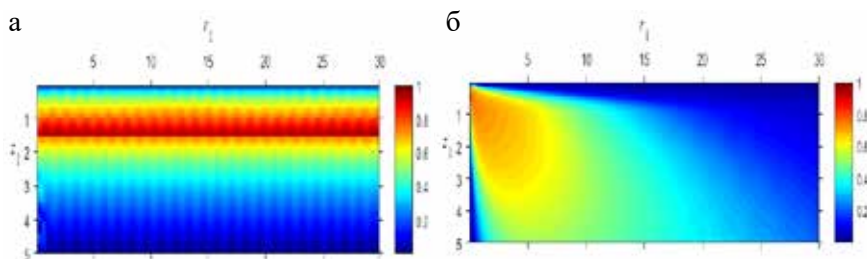


Рис. 5. Обобщенное решение (а) и классическое решение (б);  $k_1h=2.8, z_{0l}=0.5$ .

поле вносит обобщённая волна Брюстера, локализованная на горизонте источника, и первая вытекающая КВ. С увеличением частоты первая вытекающая КВ затекает в волновод и формирует продольный резонанс с аномальной амплитудой и с аномальной зависимостью амплитуды от расстояния.

### Модельное описание крупномасштабных вихревых полей.

Обобщённые и регулярные волны в их парном существовании и взаимной трансформации являются ключевым понятием в обобщённой теории нормальных волн в волноводах, нагруженных на физическое полупространство, жидкое либо твёрдое. В обоих рассмотренных случаях встречный сдвиг волнового процесса вдоль границы раздела ведёт к образованию вихревой составляющей вектора интенсивности. Для неформального объединения пары сопряжённых нормальных волн в единую КВ достаточно использовать алгоритм суммирования с весом. Особый интерес представляет генерация вихревых структур в поле КВ различного типа. Рассмотрим этот вопрос на примере КВ вещественного спектра, структура которых (в потенциалах) описывается выражением

$$\frac{\varphi_{nm}(r, z)}{\varphi_0} = a_n \varphi_n(r, z) + b_m \varphi_m(r, z), \quad (1)$$



$$\varphi_n(r, z) = \frac{\varphi_n(z_0)\varphi_n(z)}{E_n} H_0^{(2)}(\xi_n r), \quad \varphi_0 = -i \frac{2\pi}{h}, \quad z \in (0, h).$$

$$E_n = 1 - \frac{\sin(2k_{31,n}h)}{2k_{31,n}h} + \rho_{12} \frac{\sin^2(k_{31,n}h)}{\alpha_{2,n}h}, \quad k_{31}^2 = k_1^2 - \xi^2,$$

$$E_m = 1 - \frac{\sin(2k_{31,m}h)}{2k_{31,m}h} - \rho_{12} \frac{\sin^2(k_{31,m}h)}{\alpha_{2,m}h}, \quad \alpha_2^2 = \xi^2 - k_2^2,$$

$$\varphi_n(z) = \sin(k_{31,n}z), \quad a_n = \frac{E_n}{E_n + E_m}, \quad b_m = \frac{E_m}{E_n + E_m}, \quad a_n + b_m = 1,$$

$$\rho_{12} = \rho_1 / \rho_2$$

$$\bar{v} = -\text{grad } \varphi = \bar{v}_1 + i\bar{v}_2 = |v| e^{i\psi}, \quad (2)$$

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \omega \rho_1 \text{Im}(\bar{v} \times \bar{v}^*),$$

$$H_\psi = \omega \rho_1 (v_{1z} v_{2r} - v_{2z} v_{1r}) = \omega \rho_1 |v_r| |v_z| \sin(\psi_z - \psi_r).$$

$$H_0 = I_0 k_r, \quad p_0 = \omega \rho_1 |\varphi_0|$$

$\varphi_n(r, z)$ ,  $\varphi_m(r, z)$ -регулярная и обобщённая составляющие КВ,  $k_{31}^2 = k_1^2 - \xi^2$ ,  $\alpha_2^2 = \xi^2 - k_2^2$ ,  $\xi$ -горизонтальное волновое число.  $K_1, k_2$  – волновые числа в волноводе и полупространстве,  $\rho_1, \rho_2$ -плотность среды в волноводе и полупространстве соответственно,  $z_0$ -горизонт источника,  $h$ -глубина волновода,  $\mathbf{v}$ -вектор колебательной скорости,  $z_{0l} = z_0/h$ ,  $r_l = r/h$ .

На рис. 6 приведены в сравнительном плане пространственные структуры поля угловой компоненты ротора вектора интенсивности и поля квадрата звукового давления (с исключённой цилиндрической расходимостью) для первых трёх КВ для значения частотного параметра  $k_1 h = 20$  в поле приповерхностного источника. Отметим основные особенности пространственных структур для сравниваемых звуковых полей.

Во всех КВ размер вихревых структур ограничен в горизонтальном и вертикальном направлении и определяется периодом интерференции сопряжённых волн. В первой КВ доминирующий вклад вносит регулярная составляющая. По этой причине размер вихревой зоны в горизонтальном направлении на рисунке не определён, а размер вихря в вертикальном направлении составляет четверть длины волны (для вертикального волнового числа). В вихревом поле второй КВ формируются горизонтально ориентированные цепочки, в которых сохраняется направление вращения вихрей. Направление вращения вихрей изменяется в вертикальном направлении (в направлении формирования стоячей волны), а на глубине

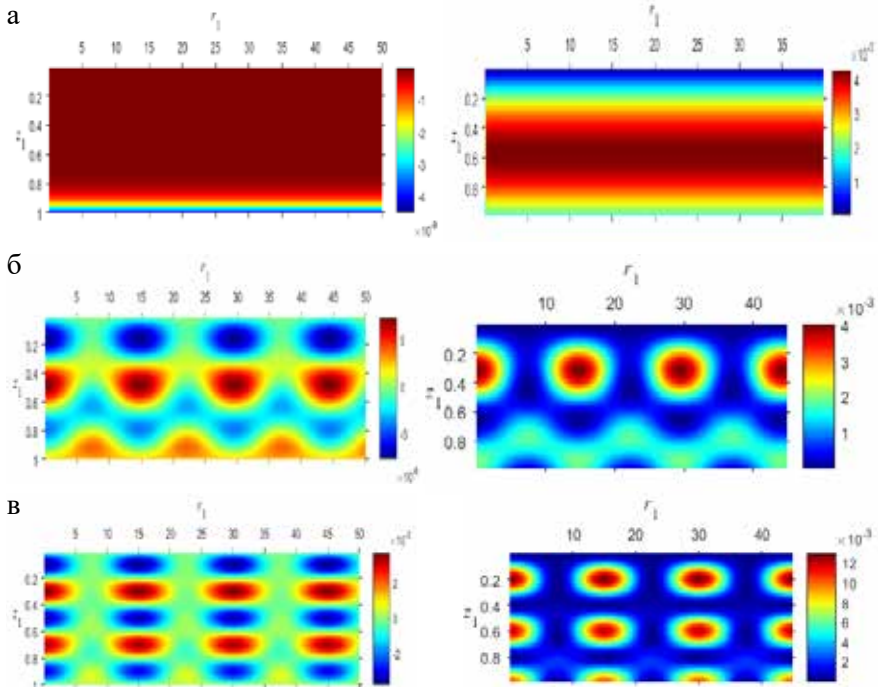


Рис. 6. Поле угловой компоненты  $H_{\psi n}(r, z) / H_0$  (левый столбец) и квадрата звукового давления  $(p / p_0)^2$  (правый столбец),  $k_1 h = 20$ ,  $z_{01} = 0,01$ : а) – первая КВ; б) – вторая КВ; в) – третья КВ.

волновода формируются три вихря, каждый размером в четверть длины волны. Для третьей КВ вихревые цепочки сохраняют горизонтальную ориентацию, а на глубине волновода формируются пять вихрей, каждый размером в четверть длины волны. Пространственный период вихревых структур в горизонтальном направлении определяется разностью пространственной частотой интерферирующих волн.

При увеличении частотного параметра увеличивается число КВ в суммарном звуковом поле, усложняется пространственная интерференционная структура поля звукового давления в комбинационных волнах более высокого порядка и связанного с ним вихревого поля. Пространственная структура суммарного звукового поля по обоим сравниваемым параметрам показана на рис. 7а. На рис. 7б представлен горизонтальный разрез звукового поля для нормированных значений угловой компоненты вихря (красный цвет) и модуля звукового давления (синий цвет). Параметры модельного эксперимента выбраны соответствующими параметрам эксперимента, выполненного в работе [17]. Поскольку в классическом ре-

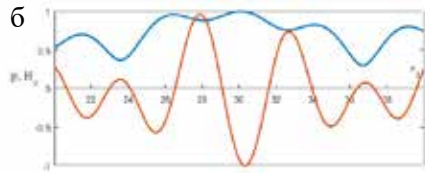
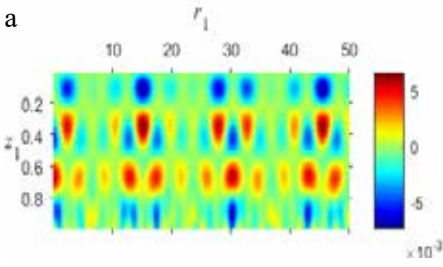


Рис. 7. Суммарное поле угловой компоненты  $H_\psi$ ,  $k_1 h = 20$ ,  $z_{01} = 0.5$ , а); горизонтальный разрез звукового поля,  $z_{01} = 0.5$ ,  $z_1 = 0.4$ , б).

шении звуковое поле формируется исключительно собственными функциями самосопряжённого оператора, а именно, расходящимися волнами с вещественными волновыми числами, то и соответствующее ему вихревое поле будет иметь описанную выше крупномасштабную структуру.

### Модельное описание мелкомасштабных знакопеременных вихревых полей.

Вытекающие волны комплексного спектра были включены в суммарное решение ГЗ в пионерской работе Пекериса [1]. Однако его решение оказалось некорректным при описании звукового поля в полупространстве, где амплитуда вытекающих волн экспоненциально растёт с глубиной. Несамосопряжённая модельная постановка ГЗ позволяет получить корректное решение во всей области определения решения, но только с использованием собственных функций двух сопряжённых операторов с волновыми числами  $(\xi, -\xi^*)$ , формирующих вытекающие КВ, и механизма их взаимной трансформации. Структура вытекающей КВ описывается выражением

$$\frac{\varphi_n(r, z)}{\varphi_0} = a_n \frac{\varphi_n(z_0)\varphi_n(z)}{E_n} H_0^{(2)}(\xi_n r) + b_n \frac{\varphi_n^*(z_0)\varphi_n^*(z)}{E_n^*} H_0^{(2)}(-\xi_n^* r), \quad (3)$$

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{h}, \quad E_n = 1 - \frac{\sin(2k_{31,n}h)}{2k_{31,n}h} - i\rho_{12} \frac{\sin^2(k_{31,n}h)}{k_{32,n}h}, \quad k_{32} = \sqrt{k_2^2 - \xi^2},$$

$$a_n + b_n = 1.$$

В представлении  $E_n = I_n + iQ_n$  весовые коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  можно определить формулами энергетического взвешивания аналогично тому, как это было сделано для КВ с вещественными горизонтальными волновыми числами

$$a_n = \frac{|I_n| + |Q_n|}{2|I_n|}, \quad b_n = \frac{|I_n| - |Q_n|}{2|I_n|}, \quad a_n - b_n = \left| \frac{Q_n}{I_n} \right|.$$

$$F_n(r, z) = \frac{\varphi_n(z_0)\varphi_n(z)}{E_n} H_0^{(2)}(\xi_n r) \quad (4)$$

Перепишем (3) с учётом (4) в виде

$$\frac{\varphi_n(r, z)}{\varphi_0} = \operatorname{Re}[F_n(r, z)] + i \frac{Q_n}{I_n} \operatorname{Im}[F_n(r, z)]. \quad (5)$$

На рис. 8 представлена пространственная структура нормированной угловой компоненты ротора вектора интенсивности в окрестности первой частоты продольного резонанса. Хорошо видно, что горизонтально ориентированные вихревые дорожки сформированы вихрями с противоположным направлением вращения, амплитуда которых убывает экспоненциально быстро с ростом расстояния. Рис. 9, а), б) поясняют в сравнительном плане пространственные структуры квадрата звукового давления и угловой компоненты вихря для первой вытекающей КВ на первой частоте продольного резонанса. В таблице 1 приведены комплексные значения горизонтального волнового числа как функции частотного параметра в окрестности первой частоты продольного резонанса волновода в обозначениях  $\xi h = \pm \operatorname{Re} \xi h - i \operatorname{Im} \xi h$

По мере приближения частотного параметра к резонансному значению уменьшается коэффициент затухания вытекающей волны и увели-

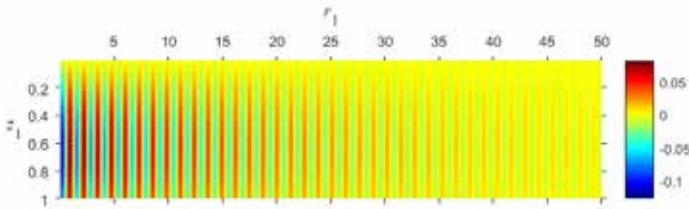


Рис. 8. Пространственная структура угловой компоненты  $H_{\varphi n}(r, z) / H_0$  для первой КВ,  $k_1 h = 2,74$ ;  $z_{01} = 0,5$ ;  $m = 1$

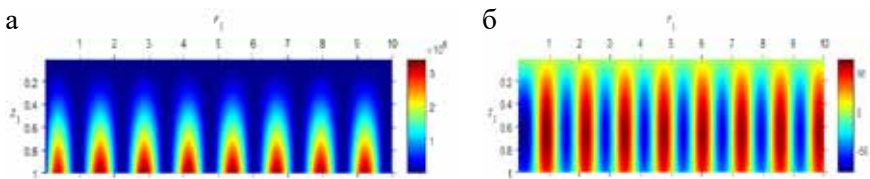


Рис. 9. Пространственная структура квадрата звукового давления  $(p / p_0)^2$ , а) и угловой компоненты  $H_{\varphi n}(r, z) / H_0$ , б) для первой КВ,  $k_1 h = 2,7436$   $z_{01} = 0,5$ ;  $m = 1$

Таблица 1. Комплексное горизонтальное волновое число и комплексная парциальная мощность для первой вытекающей КВ.

$k_1 h$	$\xi_1 h$	$E_1$
2,7	2,4206 - i0,0873	0,1109 - i0,1769
2,71	2,4321 - i0,0763	0,0878 - i0,1617
2,72	2,4436 - i0,0378	0,0634 - i0,1413
2,73	2,4551 - i0,0483	0,0377 - i0,1119
2,74	2,4666 - i0,0248	0,0104 - i0,0603
2,7436	2,4707 - i0,0023	0,0001 - i0,0056

чивается протяжённость стоячей (в горизонтальном направлении) волны в волноводе. Вертикальная структура звукового поля такова, что на глубине волновода укладывается четверть длины волны. Горизонтальная структура звукового поля такова, что период стоячей волны в горизонтальном направлении равен половине длины волны (для горизонтального волнового числа). В таблице 1 приведены также оценки парциального комплексного потока мощности  $E_n$ , соответствующего первой вытекающей волне, играющего роль нормирующего множителя в формулах (1)–(3). Его роль такова, что вклад данной моды в суммарное звуковое поле тем больше, чем меньше парциальная мощность, приходящаяся на данную нормальную волну. Можно отметить, что вдали от частоты продольного резонанса в потоке комплексной мощности преобладает вещественная составляющая, описывающая излучение вытекающей волны в полупространство. Мнимая составляющая комплексного потока мощности, описывающая формирование стоячей волны в волноводе, становится доминирующей в окрестности частоты продольного резонанса. Аналогичные расчёты были выполнены для второй вытекающей КВ (третьей гармоники продольного резонанса). Результаты численного анализа поясняются рис. 10–11. Вертикальная структура третьей гармоники такова, что на толщине волновода укладывается три четверти длины волны. Горизонтальная структура соответствует структуре стоячей волны. Наконец, полный анализ пространственной структуры звукового поля был выполнен для третьей вытекающей КВ (пятой гармоники продольного резонанса волновода). Результаты анализа поясняются рис. 12–13.

Можно отметить жёсткую связь узловых точек в пространственной структуре поля звукового давления и седловых точек в пространственной структуре угловой компоненты вихря, названные в работе [18] дислокациями фазового фронта. Узловые точки соответствуют нулям звукового давления. Седловые точки соответствуют нулям вещественной составляющей вектора интенсивности. Они лежат на пересечении прямых, соединяющих максимумы соседних вихрей одинакового знака. Рис. 14 поясняет

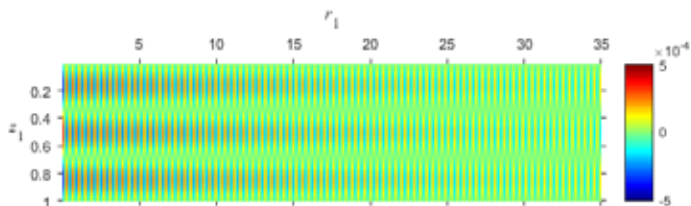


Рис. 10. Пространственная структура угловой компоненты  $H_{\psi n}(r, z) / H_0$  для второй вытекающей КВ,  $k_1 h = 9,063$ ;  $z_{01} = 0,5$ ;  $m = 2$

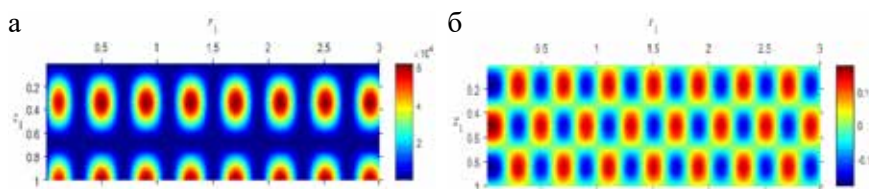


Рис. 11. Пространственная структура квадрата звукового давления  $(p / p_0)^2$ , а) и угловой компоненты  $H_{\psi n}(r, z) / H_0$ , б) для второй вытекающей КВ,  $k_1 h = 9,0669$ ;  $z_{01} = 0,5$ ;  $m = 2$

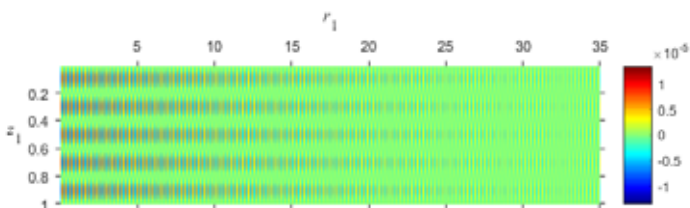


Рис. 12. Пространственная структура угловой компоненты  $H_{\psi n}(r, z) / H_0$  для третьей вытекающей КВ,  $k_1 h = 15,19$ ;  $z_{01} = 0,5$ ;  $m = 3$

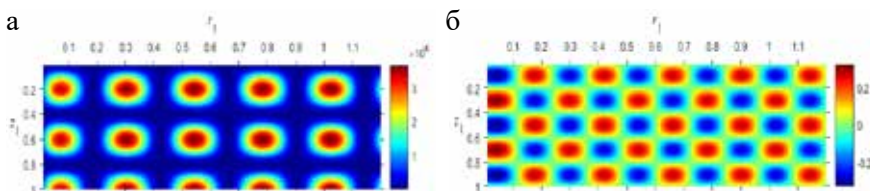
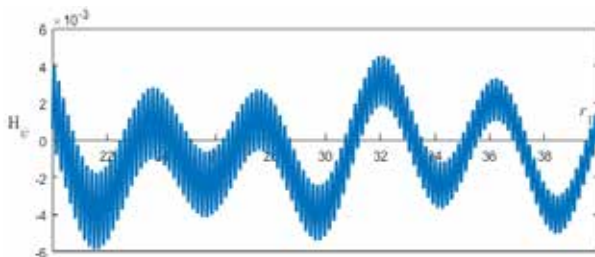


Рис. 13. Пространственная структура квадрата звукового давления  $(p / p_0)^2$ , а) и угловой компоненты  $H_{\psi n}(r, z) / H_0$ , б) для третьей вытекающей КВ,  $k_1 h = 15,1995$ ;  $z_{01} = 0,5$ ;  $m = 3$

Рис. 14. Горизонтальный разрез поля угловой компоненты  $H_{\psi n}(r, z) / H_0$  в суммарном звуковом поле,  $k, h = 21, 28$ ,  $z_{01} = 0.5$ ,  $z_1 = 0.4$ .



пространственную структуру суммарного звукового поля, образованного тремя КВ вещественного спектра и одной вытекающей КВ. Частотный параметр, принятый в расчётах, близок к частоте четвёртого продольного резонанса. Параметры модельной задачи близки к параметрам эксперимента в работе [17]. Характерно, что по мере приближения частотного параметра  $k, h$  к резонансному значению увеличивается протяжённость мелкомасштабных вихревых структур и их влияние на суммарное звуковое поле, например, в нерегулярном волноводе типа берегового клина.

#### Экспериментальная верификация модельных решений.

Модельные решения ГЗ Пекериса, классическое и обобщённое, существенно отличаются по своим свойствам, а потому экспериментальная верификация этих решений вполне возможна. Наибольшее различие модельных решений имеет место в случае мелкого моря и инфразвуковых частот, меньших первой критической частоты модельного волновода. Различие сравниваемых модельных решений, поясняемое рис. 3–5, заключается в том, звуковое поле в классическом решении является вырожденным, а звуковым поле в обобщённом решении содержит волну Брюстера, (нулевую моду), локализованную на горизонте источника. Именно эта волна обеспечивает дальнейшее распространение звуковых волн в мелком море в диапазоне инфразвуковых частот 3.0–12Гц, описанное в работе [19]. Звуковое поле в этом эксперименте представлено дискретными составляющими вально-лопастного звукояда движущегося судна, дальность обнаружения которого составила 15–20 миль. Сонограмма для отношения сигнал-помеха  $S / N$  на выходе комбинированного приёмника (КП) поясняется рис. 15а.

Возбуждение волны Брюстера в этом диапазоне частот принципиально изменяет вертикальную структуру звукового поля, которая измерялась в работах [20]–[22] вертикально ориентированной 3-х элементной антенной из (КП). Звуковое поле, представленное в классическом решении составляющими сплошного спектра, локализовано на границе раздела вода-морское дно. Звуковое поле в обобщённом решении содержит волну Брюстера, локализованную на горизонте источника, которая прин-

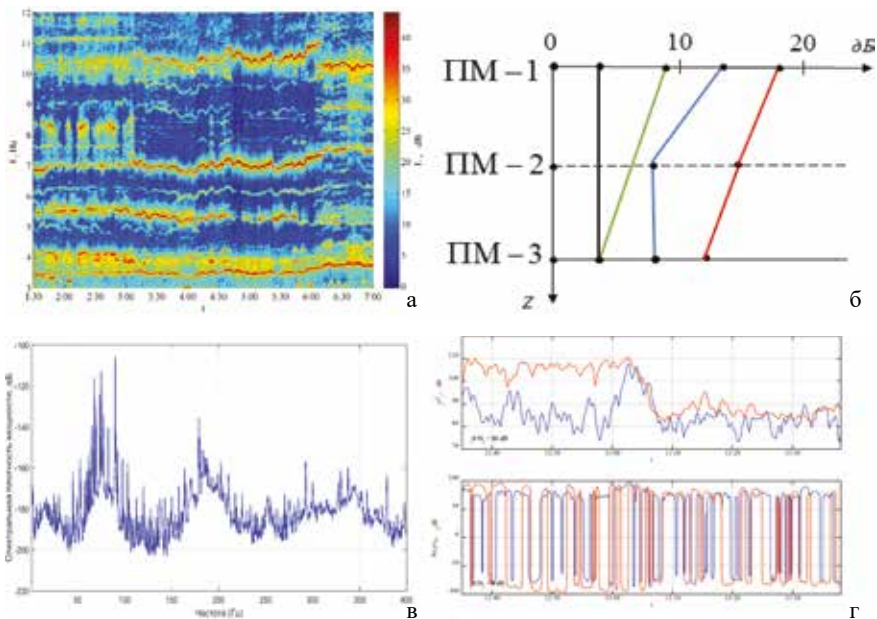


Рис. 15. Сонограмма для отношения  $S/N$  на выходе комбинированного приёмника, а). Эпюры вертикального распределения отношения  $S/N$  для звукового давления и векторных составляющих звукового поля, б). Спектральная плотность мощности в канале звукового давления, в). Проходные характеристики для отношения  $S/N$  в канале звукового давления (верхняя картина) и в векторном (х)-канале (нижняя картина), г).

ципально изменяет вертикальную структуру звукового поля в скалярно-векторном описании. Эксперименты проводились в мелком море на частотах инфразвукового диапазона. Глубина моря в месте постановки антенны составляла 45м. Горизонты установки приёмных модулей ПМ-1, ПМ-2, ПМ-3 составляли  $z_1=18\text{м}$ ,  $z_2=28\text{ м}$ ,  $z_3=38\text{ м}$ . Эпюры вертикального распределения отношения  $S/N$  для звукового давления (чёрный цвет), модуля вещественной составляющей вектора интенсивности (зелёный), модуля ротора вектора интенсивности (синий) и модуля вектора градиента давления (красный) для первой дискретной составляющей вально-лопастного звукоряда движущегося судна  $f = 1,4\text{ Гц}$  приведены на рис.15б. В работе [23] исследовалась резонансная структура спектральной плотности мощности звукового давления, измеренная экспериментально в каналах КП в мелком море в диапазоне частот 2-400 Гц в сравнении с модельным описанием продольных резонансов. Продольные резонансы являются характерной особенностью обобщённого решения и отсутствуют в классическом описании звукового поля. Частотная зависи-



мость спектральной плотности мощности в мелком море глубиной 20 м в канале звукового давления поясняется рис.15в. Хорошо видна первая частота продольного резонанса 21 Гц и её гармоники, третья, девятая. На рис. 15г приведены проходные характеристики в каналах КП. Верхняя строка относится к каналу звукового давления, нижняя строка относится к векторному (х)-каналу. Красный цвет относится к сигнальной составляющей, синий цвет относится к помехе. Уровень горизонтальной (х)- компоненты вектора интенсивности в дБ откладывается в сторону положительных значений по оси ординат, если сама компонента является положительной, и в сторону отрицательных значений, если сама компонента является отрицательной. Эксперимент проводился в береговом клине, глубина моря изменялась в пределах 15–20 м на дистанции в 6 км. Продольный резонанс характеризуется высоким уровнем звукового поля в каналах КП вплоть до расстояния в 3км от источника. В векторном (х)-канале звуковое поле носит характер стоячей волны, характерной для резонансного режима.

Наконец, в работе [17] приведено детальное исследование вихревых полей в мелком море, выполненное с использованием 4-х элементной приёмной системы из КП. Экспериментальные данные уверенно подтверждают наличие в звуковом поле крупномасштабных вихревых структур и мелкомасштабных знакопеременных вихревых структур с периодом  $\lambda/2$ . Однако мелкомасштабные знакопеременные вихревые структуры, которые генерируются вытекающими КВ комплексного спектра, присутствуют только в обобщённом решении. Все отмеченные экспериментальные результаты, полученные в работах [17], [19]–[23], уверенно подтверждают предпочтительность обобщённого решения.

Выполнена сравнительная оценка классического решения ГЗ Пекериса, полученного в классе аналитических функций в самосопряжённой модельной постановке, и обобщённого решения той же ГЗ, построенного в классе обобщённых функций в несамосопряжённой модельной постановке. Сформулированы условия, при которых обобщённое решение, одновременно разрывное по давлению и нормальной компоненте вектора колебательной скорости на горизонтах трансформации, оказывается физически корректным, обладающим свойством полноты (в математическом плане). Отмечена фундаментальность явления, связанного с возбуждением продольных резонансов в волноводах различного типа, если соответствующая ГЗ решается в несамосопряжённой модельной постановке. Приведены модельные расчёты звуковых полей, поясняющие принципиальные различия сравниваемых модельных решений. Приведены многочисленные экспериментальные данные, полученные в условиях мелкого моря и инфразвуковых частот с использованием комбинирован-

ных приёмников, подтверждающие предпочтительность обобщённого решения.

### Литература

1. Pekeris C.L. Theory of propagation of explosive sound in shallow water // Geol. Soc. Am. Mem. 1948. № 27. P. 48-156.
2. Бреховских Л.М. О поле точечного излучателя в слоисто-неоднородной среде // Изв. АН СССР. Серия физич. 1949. Т. 13. № 5. С. 505–545.
3. Завадский В.Ю., Крупин В.Д. Применение численных методов для расчёта звуковых полей в волноводах. // Акуст. журн. 1975. Т.21. №3. С.484-485.
4. Gao Tain-Fu - Shang E.C. Effect of the branch-cut on the transformation between the modes and rays // J. Acoust. Soc. Amer. 1983. V. 73. № 5. P. 1551-1555.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. Наука. 1981. 512 с.
6. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР. 1957. 502 с.
7. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука. 1973. 343 с.
8. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. Л. Гидрометеоиздат. 1982. 280 с.
9. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука. 1989. С. 278-290.
10. Акустика океана / Под. ред. Л. М. Бреховских. М.: Наукаю 1974. 692 с.
11. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика неоднородных сред. Т.1 Основы теории отражения и распространения звука. М.: Наука. 2007. 442 с.
12. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика неоднородных сред. Т.2. Звуковые поля в слоистых и трёхмерно-неоднородных средах. М.: Наука. 2009. 428 с.
13. Касаткин Б.А., Злобина Н.В. Корректная постановка граничных задач в акустике слоистых сред. Москва. Наука. 2009. 406с.
14. Касаткин Б.А., Злобина Н.В., Касаткин С.Б. Модельные задачи в акустике слоистых сред. Владивосток: Дальнаука. 2012. 256 с.
15. Касаткин Б.А., Злобина Н.В., Касаткин С.Б., Злобин Д.В., Косарев Г.В. Акустика мелкого моря в скалярно – векторном описании. Теория и эксперимент. Владивосток. 2019. 360с.
16. Физическая акустика, под редакцией У. Мэзона, Т. 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований, часть А, из-во «Мир». М. 1966. С. 140-203.
17. Щуров В.А. Фазовый механизм устойчивости вихря вектора акустической интенсивности в мелком море // Подводные исследования и робототехника. 2022. № 3(41). С.79-90.
18. Nye J.F. and Berry M.V. Dislocations in wave trains. 1974. Proc. of the Royal Society. A. P. 165–190. DOI: 10.1098/rspa.1974.0012
19. Касаткин Б.А., Касаткин С.Б. К оценке потенциальной помехоустойчивости комбинированного приёмника в инфразвуковом диапазоне частот // Гидроакустика. 2019. 39 (3). С. 10-20.
20. Касаткин С.Б. Энергетическая структура и кинематические характеристики звукового поля в инфразвуковом диапазоне частот // Гидроакустика. 2021. 46(2) С. 20-31.
21. Касаткин Б.А., Касаткин С.Б. Скалярно – векторная структура и кинематические характеристики звукового поля в инфразвуковом диапазоне частот // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2021. Т. 14. № 3. С.71-85.
22. Касаткин Б.А., Злобина Н.В., Касаткин С.Б. Обнаружение и идентификация маломощного движущегося источника на фоне шумов ближнего судородства в мелком море // Морские интеллектуальные технологии. № 3. Часть 1. 2022. С. 205-211.
23. Касаткин Б.А., Злобина Н.В., Касаткин С.Б. Резонансные явления в клиновидном волноводе в мелком море в инфразвуковом диапазоне частот // Подводные исследования и робототехника. 2022. № 4(42). С. 71-78.